Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvio Cinquini

Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.1, p. 9–14.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_9_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica. — *Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.* Nota III di SILVIO CINQUINI, presentata [(*)] dal Socio G. SANSONE.

RÉSUMÉ. — En nous référant au sommaire de la Note I, dans cette Note III on donne deux exemples pour remarquer que, contrairement au cas bien connu de deux variables indépendantes, lorsque ces variables sont plus de deux, le problème de la réduction à la forme caractéristique et la définition d'hyperbolicité (de I. G. Petrowski) sont indépendants.

6. ESEMPIO I [(13)]. È interessante illustrare i precedenti risultati rilevando, mediante un esempio, che esistono sistemi del tipo (6), i quali, trovandosi nelle condizioni del n. 4, sono riducibili alla forma caratteristica (II), ma non sono iperbolici secondo una delle definizioni di Petrowski ricordate al n. 1.

a) Sia $m = 3$, $r = 2$, vale a dire consideriamo il sistema quasi-lineare di tre equazioni nelle funzioni incognite $z_j(x, y_1, y_2)$, $(j = 1, 2, 3)$ [(14)]

$$\frac{\partial z_j}{\partial x} = -\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} b_{jsk}(x, y_1, y_2; z_1, z_2, z_3)\frac{\partial z_s}{\partial y_k}, \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{23}$$

con

$$\left\{\begin{aligned}
b_{111} &= -\cos z_2(\operatorname{sen}^2 z_2 + \operatorname{sen}^3 z_2 \cos z_2 + \cos^4 z_2),\\
b_{121} &= \operatorname{sen} z_2 \cos z_2(\cos z_2 - \operatorname{sen}^3 z_2 - \cos^3 z_2),\\
b_{131} &= \operatorname{sen} z_2 \cos^2 z_2(-\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),\\
b_{211} &= \operatorname{sen}^3 z_2 \cos z_2(-\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),\\
b_{221} &= -(\operatorname{sen}^5 z_2 + \operatorname{sen}^2 z_2 \cos^3 z_2 + \cos^3 z_2),\\
b_{231} &= \operatorname{sen}^2 z_2 \cos z_2(-\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),\\
b_{311} &= \operatorname{sen} z_2 \cos^2 z_2(-\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),\\
b_{321} &= \operatorname{sen}^2 z_2 \cos z_2(-\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),\\
b_{331} &= -\operatorname{sen} z_2 \cos z_2(\operatorname{sen} z_2 + \cos z_2),
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(13) Anche per quanto si riferisce alle notazioni, la presente Nota è la prosecuzione delle Note I e II, a cui facciamo riferimento. Vedi questi «Rendiconti», vol. XLIII, pp. 288–292 e pp. 464–468.

(14) Naturalmente nel secondo membro di ciascuna delle equazioni del sistema (23) potrebbe figurare un ulteriore termine additivo $G_j(x, y_1, y_2; z_1, z_2, z_3)$, con $G_j(\cdots)$, $(j = 1, 2, 3)$ funzioni note, che, per semplicità, supponiamo identicamente nulle.

$$
(25) \qquad \begin{cases} b_{112} = 0, \\ b_{122} = -\operatorname{sen} z_2 \cos z_2 , \\ b_{132} = -\operatorname{sen} z_2 \cos^2 z_2 , \\ b_{212} = -\operatorname{sen} z_2 \cos z_2 , \\ b_{222} = \cos^2 z_2 - \operatorname{sen}^2 z_2 , \\ b_{232} = -\operatorname{sen}^2 z_2 \cos z_2 , \\ b_{312} = -\operatorname{sen} z_2 \cos^2 z_2 , \\ b_{322} = -\operatorname{sen}^2 z_2 \cos z_2 , \\ b_{332} = -\cos^2 z_2 . \end{cases}
$$

Considerate le due equazioni caratteristiche (7), corrispondenti a $k = 1$ e a $k = 2$, nelle quali, cioè, compaiono rispettivamente le funzioni (24) e le (25), con calcoli elementari, che omettiamo, si trova che la prima ammette le radici distinte $-\operatorname{sen} z_2$, $-\cos z_2$, e siccome per $\lambda = -\cos z_2$ il primo membro di tale equazione, a riduzioni fatte, assume la forma

$$
(\cos z_2 - \operatorname{sen} z_2)^3 \operatorname{sen}^6 z_2 \cos^4 z_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ,
$$

si conclude che $-\cos z_2$ è radice doppia con divisore elementare semplice.

La seconda equazione ammette le tre radici distinte

$$
(26) \qquad \lambda_2^{(1)} = -1 \quad , \quad \lambda_2^{(2)} = \cos^2 z_2 \quad , \quad \lambda_2^{(3)} = 0 .
$$

b) A questo punto possiamo subito rilevare che il sistema (23) non è iperbolico secondo Petrowski. Infatti, in primo luogo, se noi assumiamo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, e teniamo presente il risultato rilevato in *a*) per la prima equazione caratteristica, è evidente che l'equazione (3) (n. 1) ammette una radice doppia. D'altra parte tale equazione non ha la forma composta (4).

c) Per ridurre il sistema (23) alla forma caratteristica (II), rileviamo, innanzi tutto, che, in corrispondenza a ciascuna delle radici (26) il sistema

$$
\begin{cases} \xi_1 (b_{112} - \lambda) + \xi_2 b_{122} + \xi_3 b_{132} = 0 \\ \xi_1 b_{212} + \xi_2 (b_{222} - \lambda) + \xi_3 b_{232} = 0 \\ \xi_1 b_{312} + \xi_2 b_{322} + \xi_3 (b_{332} - \lambda) = 0 \end{cases}
$$

è soddisfatto dalle terne di funzioni

$$
C_{11}^* = \operatorname{sen}^2 z_2 \cos^2 z_2 (1 + \cos^2 z_2) \quad , \quad C_{12}^* = \operatorname{sen}^3 z_2 \cos z_2 (1 + \cos^2 z_2) ,
$$
$$
C_{13}^* = \operatorname{sen} z_2 \cos^2 z_2 (1 + \cos^2 z_2);
$$

$$
C_{21}^* = \operatorname{sen}^2 z_2 \cos^2 z_2 (1 + \cos^2 z_2) \quad , \quad C_{22}^* = -\operatorname{sen} z_2 \cos^3 z_2 (1 + \cos^2 z_2) ,
$$
$$
C_{23}^* = 0 ;
$$

$$
C_{31}^* = \operatorname{sen} z_2 \cos^5 z_2 \quad , \quad C_{32}^* = \operatorname{sen}^2 z_2 \cos^4 z_2 ,
$$
$$
C_{33}^* = -\operatorname{sen}^2 z_2 \cos^3 z_2 ,
$$

il cui determinante è uguale al prodotto $\operatorname{sen}^3 z_2 \cos^6 z_2 (1 + \cos^2 z_2)^2 \Delta$, ove

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 & \operatorname{sen}^2 z_2 & \cos z_2 \\ \operatorname{sen} z_2 & -\cos z_2 & 0 \\ \cos^2 z_2 & \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 & -\operatorname{sen} z_2 \end{vmatrix} = 1.$$

Pertanto, in corrispondenza alle tre radici (26) della seconda equazione caratteristica, possiamo assumere, come rispettivi autovettori (18), quelli individuati dalle tre linee del determinante Δ, vale a dire

$$\begin{aligned} &C_{11} = \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \quad , && C_{12} = \operatorname{sen}^2 z_2 \quad , && C_{13} = \cos z_2; \\ &C_{21} = \operatorname{sen} z_2 \quad , && C_{22} = -\cos z_2 \quad , && C_{23} = 0; \\ &C_{31} = \cos^2 z_2 \quad , && C_{32} = \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \quad , && C_{33} = -\operatorname{sen} z_2. \end{aligned}$$

Successivamente, siccome è $\Delta = 1$, si hanno immediatamente gli elementi c_{ij}, $(i, j = 1, \cdots, m)$ del determinante C avente come complementi algebrici gli elementi di Δ

$$(27) \quad \begin{cases} c_{11} = \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \quad , & c_{12} = \operatorname{sen}^2 z_2 \quad , \quad c_{13} = \cos z_2, \\ c_{21} = \operatorname{sen} z_2 \quad , & c_{22} = -\cos z_2 \quad , \quad c_{23} = 0, \\ c_{31} = \cos^2 z_2 \quad , & c_{32} = \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \quad , \quad c_{33} = -\operatorname{sen} z_2 . \end{cases}$$

Tenuto presente che la permutazione delle radici della seconda equazione caratteristica è data dalla (26), formiamo la matrice (20), scegliendo le radici della prima equazione come segue

$$(28) \qquad \lambda_1^{(1)} = -\operatorname{sen} z_2 \quad , \quad \lambda_1^{(2)} = -\cos z_2 \quad , \quad \lambda_1^{(3)} = -\cos z_2 .$$

Con calcoli elementari si verifica, che ciascuna delle matrici (21), le quali, nel presente esempio, sono in numero di tre e sono costituite da tre colonne e da sei linee, ha caratteristica due.

Quindi, tenute presenti le (27), nonché le (26) e (28), il sistema (23) assume la forma caratteristica [15]

$$(29) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \left[\dfrac{\partial z_1}{\partial x} - \operatorname{sen} z_2 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} - \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2}\right] + \operatorname{sen}^2 z_2 \left[\dfrac{\partial z_2}{\partial x} - \operatorname{sen} z_2 \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2}\right] + \\ \qquad + \cos z_2 \left[\dfrac{\partial z_3}{\partial x} - \operatorname{sen} z_2 \dfrac{\partial z_3}{\partial y_1} - \dfrac{\partial z_3}{\partial y_2}\right] = 0, \\ \operatorname{sen} z_2 \left[\dfrac{\partial z_1}{\partial x} - \cos z_2 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} + \cos^2 z_2 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_2}\right] - \\ \qquad - \cos z_2 \left[\dfrac{\partial z_2}{\partial x} - \cos z_2 \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1} + \cos^2 z_2 \dfrac{\partial z_2}{\partial y_2}\right] = 0, \\ \cos^2 z_2 \left[\dfrac{\partial z_1}{\partial x} - \cos z_2 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1}\right] + \operatorname{sen} z_2 \cos z_2 \left[\dfrac{\partial z_2}{\partial x} - \cos z_2 \dfrac{\partial z_2}{\partial y_1}\right] - \\ \qquad - \operatorname{sen} z_2 \left[\dfrac{\partial z_3}{\partial x} - \cos z_2 \dfrac{\partial z_3}{\partial y_1}\right] = 0. \end{cases}$$

(15) Quale verifica dei calcoli omessi, si può soggiungere che si ritrova immediatamente il sistema (23), applicando la regola di Cramer al sistema (29), considerato come un sistema di tre equazioni algebriche lineari nelle incognite $\dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_2}{\partial x}, \dfrac{\partial z_3}{\partial x}$, avente Δ come determinante dei coefficienti.

7. Esempio II. *a*) Consideriamo il sistema semilineare di due equazioni, le cui funzioni incognite $z_1(x, y_1, y_2)$, $z_2(x, y_1, y_2)$ dipendono da tre variabili indipendenti,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x} &= -a\frac{\partial z_1}{\partial y_1} - b\frac{\partial z_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} &= -c\frac{\partial z_1}{\partial y_2} - d\frac{\partial z_2}{\partial y_1}, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

ove $a(x, y_1, y_2)$, $b(x, y_1, y_2)$, $c(x, y_1, y_2)$, $d(x, y_1, y_2)$ sono quattro funzioni soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$a(x, y_1, y_2) \neq d(x, y_1, y_2), \tag{31}$$

mentre le altre due funzioni sono dello stesso segno; per fissare le idee sia

$$b(x, y_1, y_2) > 0 \quad , \quad c(x, y_1, y_2) > 0. \tag{32}$$

L'equazione (3) (n. 1), vale a dire

$$\begin{vmatrix} \rho + a\alpha_1 & b\alpha_2 \\ c\alpha_2 & \rho + d\alpha_1 \end{vmatrix} = 0$$

ha le due radici

$$\rho = \frac{1}{2}\left[-(a+d)\alpha_1 \pm \sqrt{(a-d)^2\alpha_1^2 + 4bc\alpha_2^2}\right],$$

le quali, siccome α_1 e α_2 non si possono annullare simultaneamente, in virtù delle (31) e (32) sono sempre reali e distinte, e pertanto il sistema (30) è iperbolico secondo Petrowski.

b) Mostriamo, innanzi tutto, che, in base alle considerazioni del n. 3, esso non può essere ridotto alla forma caratteristica (II).

Infatti le equazioni (7) sono le seguenti

$$\begin{vmatrix} -\lambda + a & 0 \\ 0 & -\lambda + d \end{vmatrix} = 0, \tag{33}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & b \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{34}$$

e pertanto la (33) ha le radici $\lambda = a$, $\lambda = d$, mentre quelle della (34) sono $\lambda = \pm\sqrt{bc}$. Possiamo formare la matrice (20) assumendo o

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= a \quad , \quad \lambda_1^{(2)} = d, \\ \lambda_2^{(1)} &= \sqrt{bc} \quad , \quad \lambda_2^{(2)} = -\sqrt{bc} \end{aligned}\right. \tag{35}$$

oppure

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= a \quad , \quad \lambda_1^{(2)} = d, \\ \lambda_2^{(1)} &= -\sqrt{bc} \quad , \quad \lambda_2^{(2)} = \sqrt{bc}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Se sono verificate le (35), deve avere caratteristica uno ciascuna delle matrici

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -a+d \\ -\sqrt{bc} & b \\ c & -\sqrt{bc}, \end{matrix} \right. \qquad \left\| \begin{matrix} -d+a & 0 \\ 0 & 0 \\ \sqrt{bc} & b \\ c & \sqrt{bc} \end{matrix} \right.$$

vale a dire deve essere simultaneamente

$$(-a+d)\sqrt{bc}=0 \quad , \quad (-a+d)\,c=0 \quad , \quad (-d+a)\,b=0.$$

e ciò è impossibile per le (31) e (32).

Tale conclusione sussiste anche se hanno luogo le (36), perché basta cambiare $-\sqrt{bc}$ in $\sqrt{bc}$.

c) Infine vediamo, se è possibile ridurre il sistema (30) alla forma caratteristica (II) dopo aver effettuato un cambiamento delle funzioni incognite del tipo indicato al n. 5, *d*), vale a dire

$$u_1 = h_{11} z_1 + h_{12} z_2 \quad , \quad u_2 = h_{21} z_1 + h_{22} z_2 \, , \tag{36'}$$

ove possiamo, senz'altro, supporre che sia

$$\begin{vmatrix} h_{11}(x, y_1, y_2) & h_{12}(x, y_1, y_2) \\ h_{21}(x, y_1, y_2) & h_{22}(x, y_1, y_2) \end{vmatrix} = 1. \tag{37}$$

Siccome, in virtù della (37), dalle (36') segue in modo ovvio

$$z_1 = h_{22} u_1 - h_{12} u_2 \quad , \quad z_2 = -h_{21} u_1 + h_{11} u_2,$$

il sistema (30) si trasforma nel seguente

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= (-a h_{11} h_{22} + d h_{12} h_{21}) \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + (b h_{11} h_{21} - c h_{12} h_{22}) \frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \\ &\qquad + (a-d) h_{11} h_{12} \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + (-b h_{11}^2 + c h_{12}^2) \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + T_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= (-a+d)\, h_{21} h_{22} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + (b h_{21}^2 - c h_{22}^2) \frac{\partial u_1}{\partial y_2} + \\ &\qquad + (a h_{12} h_{21} - d h_{11} h_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + (-b h_{11} h_{21} + c h_{12} h_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + T_2, \end{aligned} \right. \tag{38}$$

ove si sono indicati con T_1 e T_2 due funzioni, che non interessano, perché dipendono, oltreché dalle variabili indipendenti, dalle funzioni incognite u_1, u_2, ma non dalle loro derivate parziali.

Scritte le equazioni caratteristiche (7) corrispondenti ai valori $k=1$ e $k=2$, siccome esse hanno le stesse radici delle equazioni (33) e (34), consideriamo ancora le matrici (35) e (36). Affinché il sistema (38) sia riducibile alla forma caratteristica (II), devono avere caratteristica uno, o entrambe le matrici

$$(39)\quad \begin{Vmatrix} ah_{11}h_{22} - dh_{12}h_{21} - a & (-a+d)h_{11}h_{12} \\ (a-d)h_{21}h_{22} & -ah_{12}h_{21} + dh_{11}h_{22} - a \\ -bh_{11}h_{21} + ch_{12}h_{22} - \sqrt{bc} & bh_{11}^2 - ch_{12}^2 \\ -bh_{21}^2 + ch_{22}^2 & bh_{11}h_{21} - ch_{12}h_{22} - \sqrt{bc} \end{Vmatrix},$$

$$(40)\quad \begin{Vmatrix} ah_{11}h_{22} - dh_{12}h_{21} - d & (-a+d)h_{11}h_{12} \\ (a-d)h_{21}h_{22} & -ah_{12}h_{21} + dh_{11}h_{22} - d \\ -bh_{11}h_{21} + ch_{12}h_{22} + \sqrt{bc} & bh_{11}^2 - ch_{12}^2 \\ -bh_{21}^2 + ch_{22}^2 & bh_{11}h_{21} - ch_{12}h_{22} + \sqrt{bc} \end{Vmatrix},$$

oppure entrambe le matrici dedotte dalle (39) e (40), cambiando $\sqrt{bc}$ in $-\sqrt{bc}$.

Usufruendo della (37), si trova elementarmente che, affinché la matrice (39) abbia caratteristica uno, devono essere soddisfatte le seguenti quattro condizioni

$$(41)\quad \begin{cases} (a-d)h_{12}(ch_{12} - h_{11}\sqrt{bc}) = 0 \quad , \quad (a-d)h_{12}(ch_{22} - h_{21}\sqrt{bc}) = 0, \\ (a-d)h_{22}(ch_{12} - h_{11}\sqrt{bc}) = 0 \quad , \quad (a-d)h_{22}(ch_{22} - h_{21}\sqrt{bc}) = 0. \end{cases}$$

Tenute presenti le (31) e (32), sono da esaminare quattro casi:

1° Non può essere $h_{12} = h_{22} = 0$, perché non potrebbe valere la (37).

2° Sia $h_{12} = 0$, $h_{22} \neq 0$. Allora, affinché sia soddisfatta la terza delle (41), deve essere $h_{11} = 0$, in contrasto con la (37).

3° Sia $h_{22} = 0$, $h_{12} \neq 0$. Allora, affinché sia soddisfatta la seconda delle (41), deve essere $h_{21} = 0$, ancora in contrasto con la (37).

4° Se è $h_{12} \neq 0$, $h_{22} \neq 0$, deve essere simultaneamente

$$ch_{12} - h_{11}\sqrt{bc} = 0 \quad , \quad ch_{22} - h_{21}\sqrt{bc} = 0,$$

e ciò è impossibile, perché dovrebbe essere

$$\begin{vmatrix} h_{12} & h_{11} \\ h_{22} & h_{21} \end{vmatrix} = 0$$

contrariamente alla (37).

Dunque la matrice (39) non può avere caratteristica uno, e pertanto ogni indagine sulla (40) è superflua.

D'altra parte, in virtù dei calcoli ora fatti, è ovvio che anche la matrice, dedotta dalla (39) cambiando $\sqrt{bc}$ in $-\sqrt{bc}$, non può avere caratteristica uno.

In definitiva si conclude che il sistema (30), iperbolico secondo Petrowski, non può essere ridotto alla forma caratteristica (II), né direttamente, né attraverso il preliminare cambiamento delle funzioni incognite (36').