

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

VALENTINO TOMELLERI

**Il metodo dell'angolo parallattico: una  
determinazione di coordinate geografiche da riprese  
fotogrammetriche celesti per satelliti artificiali**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.1, p. 83–90.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1968\\_8\\_44\\_1\\_83\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_83_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Geodesia.** — *Il metodo dell'angolo parallattico: una determinazione di coordinate geografiche da riprese fotogrammetriche celesti per satelliti artificiali.* Nota di VALENTINO TOMELLERI, presentata (\*) dal Socio L. SOLAINI.

SUMMARY. — Equatorial coordinates of the main axis of a ballistic camera can be determined from the elements of camera exterior orientation. The parallactic angle too, in the principal point of the plate, can be derived if, e.g., a spirit level has been conveniently mounted on the camera and used during the astro-photogrammetric observations. From two or more plates and by means of the parallactic angle both the geographical coordinates of the camera station can be determined with an expected accuracy of about  $\pm 0''.4$ . A graphical solution is also presented in the paper.

1. — Dall'orientamento della camera balistica fotogrammetrica per via stellare si possono trarre le coordinate equatoriali celesti, all'istante di presa, della direzione del suo asse principale e lo sbandamento del fotogramma piano rispetto al semi-meridiano celeste (o semi-cerchio orario) relativo al suo punto principale.

Quando la camera venisse dotata di una opportuna livella, sistemata ad hoc, o di altro conveniente dispositivo, si potrebbe far sì, permettendolo la struttura della camera, che all'atto della ripresa celeste uno degli assi reciprocamente ortogonali del fotogramma piano risulti orizzontale. In tali condizioni operative, e fatta eccezione per una ripresa realmente zenitale, il predetto sbandamento s'identificherebbe con l'angolo parallattico (o con il suo complemento), rispetto allo zenit locale, del punto celeste principale (immagine, cioè, sulla sfera celeste delle direzioni, dell'asse e punto principali).

Del consueto triangolo fondamentale di posizione: polo boreale ( $P_b$ ) – zenit ( $Z$ ) – astro (ipotetico = punto celeste principale) riuscirebbe in tal modo determinato anche l'angolo parallattico « all'astro », oltre naturalmente alla declinazione di questo. Ne conseguirebbe la possibilità d'una utilizzazione di tale angolo parallattico per la determinazione astronomica delle coordinate geografiche della stazione secondo un nuovo metodo, che si denominerà appunto « dell'angolo parallattico » (1). Lo zenit riesce quindi individuabile, sulla sfera delle direzioni, mediante l'intersezione di (almeno) due cerchi (verticali) massimi distinti di nota inclinazione parallattica rispetto ai semi-cerchi orari dei corrispondenti punti celesti principali.

(\*) Nella seduta del 13 gennaio 1968.

(1) Non si farà menzione, nella presente breve Nota, delle ovvie applicazioni d'una camera balistica fotogrammetrica opportunamente corredata secondo i classici metodi (riprese zenitali o quasi, riprese meridiane e circum-meridiane, metodi di Talcott e generalizzati, metodo delle uguali altezze, ecc., riprese d'una adatta mira luminosa fissa terrestre sullo sfondo celeste, ecc.) per determinazioni astronomiche esclusive di coordinate geografiche e direzione meridiana.

2. - Siano  $C_1$  e  $C_2$  (fig. 1) i due distinti punti celesti principali (non giacenti entrambi su uno stesso cerchio massimo verticale) relativi, rispettivamente, alle due prese fotogrammetriche celesti (secondo azimut, dell'asse principale della camera, non mutuamente differenti per multipli di  $\pi$ ) eseguite l'una all'istante  $\theta_1$  e l'altra all'istante  $\theta_2$  secondo il tempo siderale d'una stazione fondamentale  $S_f$  (cioè, ad esempio, Greenwich) di riferimento.

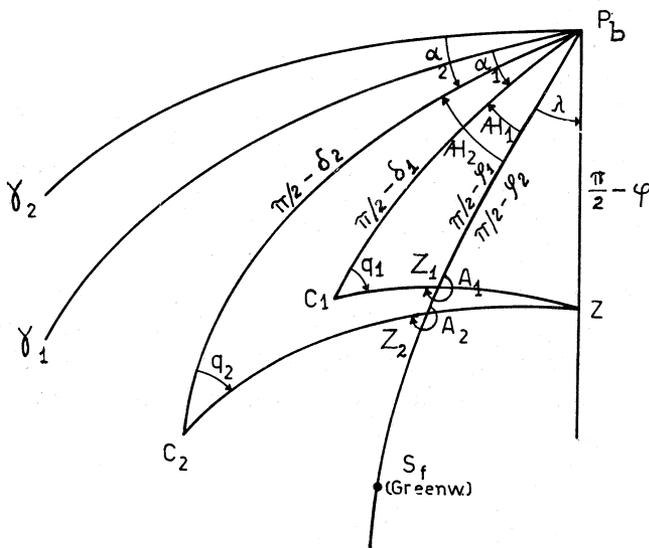


Fig. 1.

Per  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) siano poi, al corrispondente istante  $\theta_i$ ,  $\alpha_i$  la ascensione retta,  $\delta_i$  la declinazione e  $q_i$  l'angolo parallattico (in senso orario, all'esterno della sfera celeste, a partire dal semicerchio orario  $\widehat{P_b C_i}$  di  $C_i$ ), quali si deducono dagli elementi di orientamento della camera, nel sistema istantaneo di coordinate equatoriali celesti apparenti cui son riferite le stelle utilizzate per l'orientamento.

Essendo poi  $AH_i = \theta_i - \alpha_i$  l'angolo orario di  $C_i$  rispetto alla stazione fondamentale  $S_f$  di riferimento per il tempo, si determini, mediante l'equazione:

$$(1) \quad \tan \varphi_i = \cos AH_i \cdot \tan \delta_i + \sin AH_i \cdot \sec \delta_i \cdot \cot q_i$$

quando  $q_i \neq 0$  e  $\neq \pi$ , la declinazione  $\varphi_i$  ( $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq +\pi/2$ ) dell'intersezione  $Z_i$  del semicerchio orario  $\widehat{P_b S_f}$  relativo ad  $S_f$  con il semicerchio massimo spiccato da  $C_i$  con angolo  $q_i$  rispetto al semicerchio orario di  $C_i$  stesso.

Le due altre equazioni:

$$(2) \quad \begin{aligned} \cos A_i &= -\cos AH_i \cdot \cos q_i + \sin AH_i \cdot \sin q_i \cdot \sin \delta_i, \\ \sin A_i &= -(\sin AH_i \cdot \cos q_i + \cos AH_i \cdot \sin q_i \cdot \sin \delta_i) \cdot \csc \varphi_i \end{aligned}$$

definiscono poi, se  $\varphi_i \neq 0$ , l'angolo  $A_i$  quale « azimut celeste » di  $C_i$  rispetto a  $Z_i$ , l'angolo cioè  $\widehat{P_i Z_i C_i}$  contato a partire da  $\widehat{Z_i P_i}$  in senso orario attorno a  $Z_i$  all'esterno della sfera celeste.

Chiamate ora  $\varphi$  e  $\lambda$  le coordinate geografiche (latitudine  $\varphi$ , longitudine  $\lambda$  crescente positivamente ad est della  $S_f$ ) della postazione della camera balistica, si potrà supporre o che l'intervallo di tempo  $|\theta_2 - \theta_1|$  non sia molto grande o d'avere, altrimenti, ridotto i dati « d'osservazione » ad una medesima posizione del polo, così che  $\varphi$  e  $\lambda$  siano praticamente costanti.

Ne seguono allora per i due distinti triangoli  $P_i Z Z_1$  e  $P_i Z Z_2$ , quando pure entrambi  $A_1$  ed  $A_2$  siano  $\neq 0$  e  $\neq \pi$ , le due relazioni:

$$\sin \varphi_1 \cdot \cos \lambda + \cot A_1 \cdot \sin \lambda = \cos \varphi_1 \cdot \tan \varphi,$$

$$\sin \varphi_2 \cdot \cos \lambda + \cot A_2 \cdot \sin \lambda = \cos \varphi_2 \cdot \tan \varphi,$$

dalle quali si trae:

$$\tan \lambda = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_1 \cdot \cot A_2 - \cos \varphi_2 \cdot \cot A_1},$$

$$\tan \varphi = \pm \frac{|\sin \varphi_1 \cdot \cot A_2 - \sin \varphi_2 \cdot \cot A_1|}{\sqrt{(\cos \varphi_1 \cdot \cot A_2 - \cos \varphi_2 \cdot \cot A_1)^2 + \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)}}.$$

La conoscenza approssimata della ubicazione della stazione della camera permetterà di scegliere il valore adatto di  $\lambda$  e di associarvi il corrispondente valore algebrico di  $\varphi$ . Quando  $\varphi$  risultasse piccolo, l'incertezza derivante dal doppio segno potrà essere dirimita, ad esempio, mediante la relazione:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \lambda}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} (\sin \varphi_1 \cdot \cot A_2 - \sin \varphi_2 \cdot \cot A_1),$$

o qualcuna delle due precedenti, dedotta che si sia la longitudine  $\lambda$ .

Ovvie sono le varianti alle precedenti formule quando, in particolari situazioni geometriche di puntata, qualcuna di esse venisse meno a causa di qualche elemento o non definito o perturbante mediante una sua funzione goniometrica non limitata.

Quando, ad esempio, la puntata della camera balistica opportunamente attrezzata fosse rigorosamente zenitale, quasi la si usasse cioè come tubo fotografico zenitale, l'orientamento stesso fornirebbe di già la latitudine  $\varphi = \delta_i$  e l'ascensione retta  $\alpha_i = \theta_i + \lambda$  e quindi la longitudine  $\lambda$ , pur non risultando determinato in tale caso l'angolo parallattico (anche se di fatto lo è nell'accezione, però, più generale di sbandamento del fotogramma rispetto al meridiano).

Quando, ancora ad esempio, da una puntata si deducesse  $q_j = 0$  oppure  $q_j = \pi$ , la puntata cioè fosse stata fatta in meridiano, si avrebbe direttamente  $\lambda = \theta_i - \alpha_i$ ; dall'altra puntata, avente  $q_j \neq 0$  e  $\neq \pi$ , seguirebbe poi:

$$\tan \varphi = [\sin(\theta_j + \lambda - \alpha_j) \cdot \cot q_j + \cos(\theta_j + \lambda - \alpha_j) \cdot \sin \delta_j] \cdot \sec \delta_j.$$

Quando, invece, risultasse  $\theta_i = \alpha_i$ , cioè  $AH_i = 0$  e quindi  $\varphi_i = \delta_i$  ( $Z_i$  coincidente cioè con  $C_i$ ), le formule su scritte sussistono ancora purché all'elemento  $A_i$  si sostituisca in tal caso l'angolo parallattico corrispondente  $q_i$  ed a  $\varphi_i$  la declinazione  $\delta_i$ .

3. - Quanto esposto al precedente numero contempla la deduzione delle coordinate geografiche della stazione della camera balistica mediante una coppia (se una puntata non è zenitale) di distinte riprese in piani azimutali non differenti tra loro per multipli di  $\pi$ .

Disponendo invece, come avverrà solitamente nel caso pratico, di più riprese celesti fotogrammetriche, converrà procedere ad una deduzione mediante l'usuale metodo delle determinazioni indirette della teoria dei minimi quadrati.

Si procederà, anzitutto, qualora si presentasse sensibilmente conveniente per la precisione finale, ad una riduzione degli elementi « osservati »  $AH_i = \theta_i - \alpha_i$ ,  $\delta_i$  e  $q_i$  ad una medesima epoca, onde eliminare gli effetti dovuti alla variazione della posizione del polo <sup>(2)</sup>.

Conservando alle notazioni  $AH_i$ ,  $\delta_i$ ,  $q_i$  ancor il medesimo significato, scelto inoltre un valore approssimato  $\lambda_a$  per  $\lambda$  ponendo di conseguenza:  $AH_{ia} = AH_i + \lambda_a$ , si calcolino gli elementi approssimati  $\varphi_{ia}$  ed  $A_{ia}$  mediante le equazioni (1) e (2) date al precedente n. 2 utilizzando, beninteso, le omonime grandezze approssimate o meno.

Se pure  $\varphi_a$  è un valore approssimato costante di  $\varphi$  e si denotano con

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_a \quad \text{e} \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_a$$

le incognite da determinare, la differenziazione della nota relazione rigorosa:

$$(3) \quad \cot q_i \cdot \sin(AH_{ia} + \Delta\lambda) + \sin \delta_i \cdot \cos(AH_{ia} + \Delta\lambda) - \cos \delta_i \cdot \tan(\varphi_a + \Delta\varphi) = 0$$

porge in un primo tempo, a meno di termini d'ordine superiore in  $\Delta\varphi$  e  $\Delta\lambda$ , l'equazione di condizione linearizzata:

$$\frac{\cos \varphi_{ia}}{\cos \varphi_a} \sin A_{ia} \cdot \Delta\varphi - \cos A_{ia} \cdot (\cos \varphi_a \cdot \Delta\lambda) = \sin A_{ia} \cdot \sin(\varphi_{ia} - \varphi_a).$$

(2) Se  $(x_i, y_i)$  ed  $(x_j, y_j)$  sono le coordinate cartesiane ortogonali delle due posizioni  $P_i$  e  $P_j$  del polo boreale istantaneo alle rispettive epoche  $t_i$  e  $t_j$ , così come vengon fornite dal Bureau International de l'Heure nel sistema cartesiano avente semiasse positivo  $x$  diretto a Greenwich e semiasse positivo  $y$  a  $+6^h$  dal precedente nel consueto verso degli angoli orari, e se  $(AH_j = \theta_j - \alpha_j, \delta_j, q_j)$  è la terna di elementi istantanei osservati corrispondente a  $t_j$ , le riduzioni di questi alla posizione  $P_i$  del polo potranno ottenersi, in prima approssimazione, dai secondi membri delle relazioni:

$$\begin{aligned} \delta_j^{(i)} - \delta_j &\cong (x_i - x_j) \cdot \cos AH_j + (y_i - y_j) \cdot \sin AH_j, \\ q_j^{(i)} - q_j &\cong -\{(x_i - x_j) \cdot \sin AH_j - (y_i - y_j) \cdot \cos AH_j\} \cdot \sec \delta_j, \\ AH_j^{(i)} - AH_j &\cong -(q_j^{(i)} - q_j) \cdot \sin \delta_j. \end{aligned}$$

Ad essa, quando la stazione non sia quasi polare e sia ancor lecito ritenere  $(\varphi_{ia} - \varphi_a) \cdot \tan \varphi_a$  del medesimo ordine di  $\Delta\varphi$  e  $\Delta\lambda$ , si può dare il seguente aspetto finale più semplice:

$$(4) \quad \sin A_{ia} \cdot \Delta\varphi - \cos A_{ia} \cdot (\cos \varphi_a \cdot \Delta\lambda) = (\varphi_{ia} - \varphi_a) \cdot \sin A_{ia}$$

valido sempre nella anzidetta approssimazione e da utilizzarsi secondo i canoni dei minimi quadrati.

In tale forma essa è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica e conseguente soluzione grafica (fig. 2), disponendo ovviamente di altre equazioni generate similari.

Non pare superfluo, a tal proposito, sottolineare anzitutto, anche per il seguito, la natura zenitale dei termini della (4) e l'analogia di questa con l'equazione linearizzata del metodo delle (uguali) altezze con lo scambio di  $A_{ia}$  ed  $A_{ia} - \pi/2$ .

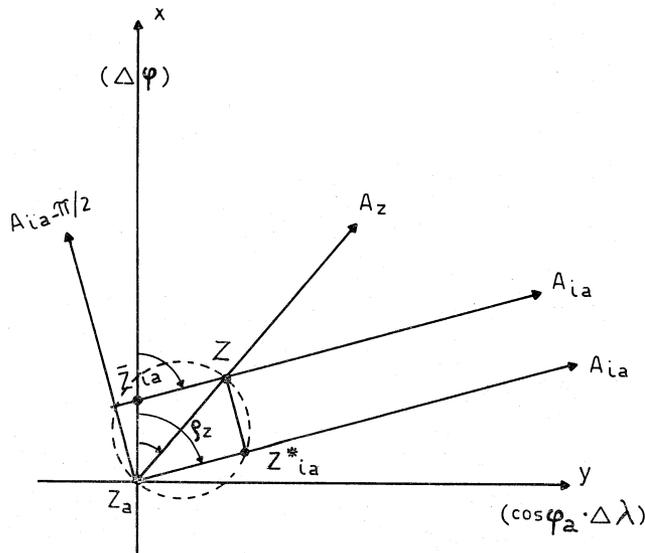


Fig. 2.

Sul piano tangente alla sfera celeste delle direzioni nel punto  $Z_a (\varphi_a, \lambda_a)$  approssimante lo zenit  $Z$ , si assuma dunque un sistema d'assi cartesiani ortogonali con origine in  $Z_a$ , asse  $x$  tangente al meridiano  $\widehat{Z_a P_b}$  e diretto al polo boreale ed asse  $y$  diretto ad est (secondo, cioè, le longitudini algebricamente crescenti). Per valori  $(\varphi_a, \lambda_a)$  sufficientemente approssimati, lo zenit  $Z$  può ritenersi su detto piano tangente. Se, quindi,  $\rho_Z$  ed  $A_Z$  ne sono il raggio vettore e l'azimut, sarà:

$$\Delta\varphi = \rho_Z \cdot \cos A_Z \quad , \quad \cos \varphi_a \cdot \Delta\lambda = \rho_Z \cdot \sin A_Z \quad ,$$

$$\rho_Z \cdot \sin (A_{ia} - A_Z) = (\varphi_{ia} - \varphi_a) \cdot \sin A_{ia} \quad ,$$

e cioè il termine noto  $(\varphi_{ia} - \varphi_a) \cdot \sin A_{ia}$  della (4) non è altro che la distanza orientata  $Z_{ia}^* Z$  dello zenit  $Z$  dalla semiretta d'azimut  $A_{ia}$  spiccata dall'ori-

gine  $Z_a$ , avendo pure assunto come sua normale orientata la semiretta d'azimut  $A_{ia} - \pi/2$ . La parallela per  $Z$  alla semiretta d'azimut  $A_{ia}$  interseca quindi l'asse orientato  $x$  nel punto  $\bar{Z}_{ia}$  d'ascissa pari alla differenza algebrica  $\varphi_{ia} - \varphi_a$  relativa all'azimut  $A_{ia}$  in gioco. Di qui la localizzazione di  $Z$  come intersezione delle rette distanti dall'origine, da parte opportuna, di quantità pari all'anzidetto termine noto  $(\varphi_{ia} - \varphi_a) \cdot \sin A_{ia}$ ; per tracciare poi una generica di tali rette basterà localizzare sull'asse orientato  $x$  il punto  $\bar{Z}_{ia}$  d'ascissa (algebrica)  $\varphi_{ia} - \varphi_a$  e spiccare da esso la semiretta d'azimut corrispondente  $A_{ia}$ .

Le rette in parola non sono altro, ovviamente, che le tracce dei cerchi massimi verticali parallattici di cui si fa cenno alla fine del precedente numero introduttivo 1.

Nella pratica si presenterà indubbiamente il caso che tali rette, per una qualche causa sistematica incognita ad effetto costante o meno o per errori accidentali, non passino tutte per un medesimo punto; lo zenit sarà allora logicamente il baricentro della figura, regolare (cerchio, ellisse, ecc.) o meno, involupata da tali rette.

4. - A facilitare la stima della variazione di un elemento indotta da possibili variazioni di altri ad esso congiunti nel triangolo fondamentale di posizione polo-zenit-astro, si riportan qui le due note relazioni differenziali del 1° ordine:

$$\sin A \cdot \Delta\varphi = \cos A \cdot \cos \varphi \cdot \Delta A H - \cos z \cdot \sin q \cdot \Delta\delta + \sin z \cdot \Delta q,$$

$$\Delta A = \sin \varphi \cdot \Delta A H + \left\{ \begin{array}{l} \sin z \cdot \sin q \\ \cos \varphi \cdot \sin A H \end{array} \right\} \cdot \Delta\delta + \cos z \cdot \Delta q,$$

essendo al solito  $z$  la distanza zenitale ed  $A$  l'azimut destrogiro a partire dal nord, secondo l'uso geodetico.

Un errore sistematico costante  $\Delta q$  per più riprese fotogrammetriche, distribuite uniformemente su tutto il giro d'orizzonte <sup>(3)</sup> ed a distanze zenitali pure pressoché uguali, produrrebbe, per  $\Delta\delta = 0$ , spostamenti dello zenit, secondo le corrispondenti direzioni  $A \pm \pi/2$ , tutti uguali a  $|\sin A \cdot \Delta\varphi - \cos A \cdot \cos \varphi \cdot \Delta A H|$ . Lo zenit sarebbe perciò il centro del cerchio di pari raggio  $|\sin A \cdot \Delta\varphi - \cos A \cdot \cos \varphi \cdot \Delta A H|$  involupato dalle tracce, prossime allo zenit, dei cerchi massimi parallattici aventi inclinazione parallattica erronea. In tali condizioni operative ideali, se possibili, le coordinate geografiche riuscirebbero correttamente determinate.

Convorrà, del resto; quando si presuma che gli angoli parallattici  $q_i$  siano sistematicamente errati di  $\Delta q$ , introdurre una tale costante nella (3) e conseguentemente nella (4) quale terza incognita accompagnata al coefficiente  $-\sin z_{ia}$ .

(3) Quando gli angoli parallattici  $q_i$  non fossero affetti da alcun errore, riprese fotogrammetriche in piani azimutali differenti tra loro per multipli di  $\pi$  porterebbero al medesimo valore approssimato  $\varphi_{ia}$ . In presenza, invece, d'un errore costante  $\Delta q$ , le variazioni  $\Delta\varphi_{ia}$  da esso indotte sugli elementi approssimati  $\varphi_{ia}$  cambian segno al variare del segno di  $\sin A_{ia}$ .

Per quanto concerne l'attribuzione di un peso, in generale, a ciascuna equazione generata in base all'errore quadratico medio del corrispondente termine noto, basterà solo ricordare attualmente la dipendenza di questo, in ultima analisi, dalle caratteristiche e prestazioni della particolare camera fotogrammetrica che si impiega e dai dati rilevati, in grande o piccolo numero, sul fotogramma.

La deduzione, del resto, dell'errore quadratico medio del termine noto non è certo difficile, anche se peraltro laboriosa, tenendo presente che  $\varphi_{ia}$  ed  $A_{ia}$  sono funzioni di grandezze determinate per via indiretta; ma porta ad una ben complessa espressione generale poco o nulla significativa.

Esperienze altrui <sup>(4)</sup> fanno ritenere possibili, almeno con camere Wild BC-4, localizzazioni di punti celesti principali con errori quadratici medi dell'ordine di  $\pm 3/10$  di secondo d'arco sessagesimale tanto per  $\alpha_i$  che per  $\delta_i$ , e così pure determinazioni, contemporaneamente, d'angolo di sbandamento con un errore quadratico medio dell'ordine di  $\pm 1''$ . Con quest'ultimo sarà poi da comporre un errore accidentale d'orizzontamento del fotogramma, giusto l'esigenza base inizialmente ipotizzata per questo metodo, dell'ordine di qualche decimo di secondo d'arco; di un eventuale errore sistematico per tale orizzontamento e d'una possibile eliminazione od attenuazione della sua influenza già si è fatto cenno poc'anzi. La componente preponderante nell'errore quadratico medio del termine noto sarà dunque certamente quella derivante dall'angolo parallattico.

Dato lo scopo del metodo presentato, la possibile utilizzazione, cioè, di parte o di tutta la gran mole di materiale fotografico acquisibile nella esecuzione prolungata di una stazione di triangolazione spaziale mediante satelliti artificiali, è da ritenere possibile, con una opportuna cernita ed uniforme distribuzione sul giro d'orizzonte delle numerose riprese, la determinazione astronomica delle coordinate geografiche della stazione stessa con un errore, per entrambe, dell'ordine di  $\pm 0'',4$  <sup>(5)</sup> e fors'anche inferiore.

Quanto si è andati, infine, via via esponendo sussiste indipendentemente dalla presenza o meno del satellite artificiale sul fotogramma. Il metodo è quindi applicabile, e senz'altro con risultati migliori per la possibilità d'effettuare riprese fotogrammetriche celesti indipendenti dai satelliti in condizioni d'optimum, anche allo scopo esclusivo d'una determinazione astronomica di coordinate geografiche d'una qualsiasi stazione.

(4) Cfr. rapporti d'autori vari in « Réseau géodésique européen par observation de satellites », Symposium de Paris, 14-16 décembre 1964 (Institut Géographique National, Paris 1965).

(5) Converrà ricordare essere, per i coefficienti dell'apposito sistema normale a due incognite, pressoché

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 A \cdot dA = \int_0^{2\pi} \cos^2 A \cdot dA = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin A \cdot \cos A \cdot dA = 0;$$

e quindi, per i coefficienti d'errore delle incognite:  $1/\sqrt{\pi} = 0,56$ . Con un errore  $\varepsilon_q = \pm 1''$  e distanze zenitali attorno a  $\pi/4$  risulterà all'incirca:  $\varepsilon_{\Delta\varphi} \cong \varepsilon_{\Delta\lambda} \cong \pm 1'' \cdot \sin(\pi/4)/\sqrt{\pi} \cong \pm 0'',4$ .