ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE GRIOLI

Il teorema di Menabrea alla luce delle deformazioni finite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.1, p. 69–74.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_69_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Meccanica. — *Il teorema di Menabrea alla luce delle deformazioni finite.* Nota di GIUSEPPE GRIOLI, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — A theorem just similar to the theorem of Menabrea valid in the linear theory of elastic equilibrium has been established in the case of finite elastic deformations. The possibility and the meaning of its inversion have been discussed.

Uno dei più noti teoremi della Elastostatica classica (lineare) è indubbiamente il teorema di Menabrea, di grande interesse per le svariate applicazioni che esso consente.

Tra l'altro, esso permette una trattazione integrale del problema fondamentale dell'equilibrio elastico, anche in presenza di vincoli unilaterali, e di avere delle indicazioni sul comportamento di un appoggio unilaterale con attrito [1].

Nel caso di deformazioni finite non esiste un analogo teorema di Menabrea, dato che non è possibile identificare l'espressione dell'energia potenziale con una forma quadratica positiva, né identificare il campo di integrazione con la configurazione di riferimento.

Esistono principi variazionali validi nel caso di deformazioni finite, ma essi solo alla lontana possono accostarsi al teorema di Menabrea e si presentano in una forma piuttosto astratta. Ricorderò quelli contenuti in [2], [3], [4], [5], [6].

Nelle pagine che seguono mi propongo di dimostrare la possibilità di stabilire un teorema strettamente corrispondente nel caso di deformazioni finite a quello di Menabrea del caso lineare, salvo, naturalmente, che le possibilità di applicazione possono riuscire più limitate poiché non è possibile identificare il campo di integrazione (che risulta esso stesso incognito) con la configurazione di riferimento. Intendo dire che se anche si dà veste lagrangiana alla trattazione e si riporta il calcolo degli integrali che intervengono alla configurazione di riferimento, tuttavia, nelle funzioni integrande interviene l'incognita configurazione attuale.

Vale la pena di osservare che sulla base del teorema stabilito si può sperare di tradurre il teorema di esistenza per deformazioni finite in quello dell'esistenza del minimo di un certo funzionale, in analogia a quanto avviene nel caso lineare.

1. PREMESSE.

Denoto con C la configurazione di riferimento (che supporrò esente da stress) di un solido elastico in equilibrio, con C′ la configurazione attuale, con y_r, x_r le coordinate rispetto a una prefissata terna trirettangola levogira

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1968.

di due punti corrispondenti P, P′ di C, C′ rispettivamente, con ε_{rs} le caratteristiche di deformazione della trasformazione $C \to C'$, con U l'energia interna del solido, con E l'entropia, con T la temperatura assoluta.

Com'è ben noto, l'espressione dell'energia libera è

$$\mathfrak{J} = U - ET. \tag{1}$$

In corrispondenza a una qualunque trasformazione infinitesima da C′ a C′ + dC′, si ha

$$\delta\mathfrak{J} = -Y_{lm}\,\delta\varepsilon_{lm} - E\,\delta T, \tag{2}$$

ove Y_{lm} denota il tensore lagrangiano dello stress. Da (2) segue

$$\delta(\mathfrak{J} + \varepsilon_{lm}\,Y_{lm}) = \varepsilon_{lm}\,\delta Y_{lm} - E\,\delta T. \tag{3}$$

Supposte invertibili le note relazioni

$$Y_{lm} = -\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial\varepsilon_{lm}}, \tag{4}$$

si deduce

$$\varepsilon_{lm} = a_{lm}(Y_{rs}, T). \tag{5}$$

Si denoti con $\bar{\mathfrak{J}}(Y, T)$ la funzione delle Y_{lm} e di T che si ottiene introducendo le espressioni (5) delle ε_{lm} nella $\mathfrak{J}(\varepsilon, T)$:

$$\bar{\mathfrak{J}}(Y_{lm}, T) = \mathfrak{J}[a_{lm}(Y_{rs}, T), T]. \tag{6}$$

Si indichi con Z la seconda funzione potenziale:

$$Z = -\bar{\mathfrak{J}} - \varepsilon_{lm}\,Y_{lm}. \tag{7}$$

Per ogni trasformazione infinitesima a partire da C′ si ottiene, tenuto conto di (5),

$$\delta Z = -\left[\frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial a_{pq}}\frac{\partial a_{pq}}{\partial Y_{lm}} + a_{lm}\right]\delta Y_{lm} - \frac{\partial a_{lm}}{\partial Y_{pq}}\,Y_{lm}\,\delta Y_{pq} - \frac{\partial\mathfrak{J}}{\partial T}\,\delta T. \tag{8}$$

Ne segue

$$\varepsilon_{lm} = -\frac{\partial Z}{\partial Y_{lm}}, \tag{9}$$

$$E = \frac{\partial Z}{\partial T}. \tag{10}$$

2. Estensione del teorema di Menabrea al caso delle deformazioni finite.

Detti F_r, f_r i vettori rappresentativi delle forze di massa e superficiali, riportati allo stato di riferimento e σ il contorno completo di C, le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni al contorno (nell'ipotesi di forze superficiali ovunque assegnate, caso in cui, per semplicità, mi porrò) si scrivono

(11) $$(x_{r,l}\, Y_{lm})_{,m} = F_r \qquad \text{(in C)},$$

(12) $$x_{r,l}\, Y_{lm}\, n_m = f_r \qquad (\text{su } \sigma),$$

ove la virgola denota derivazione rispetto alle y_r e n_m la normale interna a σ.

La configurazione attuale sia definita dalle uguaglianze

(13) $$x_r = \psi_r(y_t)$$

e sia $\overline{Y}_{lm}$ lo stress lagrangiano effettivamente presente. Sia inoltre $Y_{lm} = \overline{Y}_{lm} + \delta Y_{lm}$ un generico stress vicinissimo a quello effettivo e in equilibrio sulla configurazione C′ con le forze esterne.

Le δY_{lm} verificheranno le equazioni

(14) $$(\psi_{r,l}\, \delta Y_{lm})_{,m} = 0\,, \qquad \text{(in C)},$$

(15) $$\psi_{r,l}\, \delta Y_{lm}\, n_m = 0\,, \qquad (\text{su } \sigma).$$

Da (14), (15) segue

(16) $$\int_C u_{r,m}\, \psi_{r,l}\, \delta Y_{lm}\, dC = 0\,,$$

ove $u_r = \psi_r - y_r$ è lo spostamento da C a C′.

Risulta, evidentemente,

(17) $$\psi_{r,l}\, \psi_{r,m} = u_{r,m}\, \psi_{r,l} + \delta_{rm}\, \psi_{r,l} = 2\, \bar{\varepsilon}_{lm} + \delta_{lm}\,,$$

se con δ_{lm} si denota il simbolo di Kronecker e con $\bar{\varepsilon}_{lm}$ lo strain subordinato alle ψ_r.

Da (16), (17) segue subito

(18) $$\int_C (2\, \bar{\varepsilon}_{lm} - u_{m,l})\, \delta Y_{lm}\, dC = 0\,,$$

che, tenuto conto di (9), dà

(19) $$-\int_C \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial Y_{lm}}\right)_{Y_{lm}=\overline{Y}_{lm}} + \frac{1}{2}\, u_{m,l}\right] \delta Y_{lm}\, dC = 0\,,$$

Dalle equazioni (14), (15), moltiplicate per y_t, integrate su C e σ rispettivamente e sommate, si deduce

(20) $$\int_C \psi_{r,l}\, \delta Y_{lt}\, dC = 0$$

da cui segue

(21) $$\int_C u_{r,l}\, \delta Y_{lt}\, dC = -\int_C \delta Y_{rt}\, dC\,.$$

La (19), tenuto conto di (21), dà

$$\int_C \left[\frac{\partial}{\partial Y_{lm}}\left(Z - \frac{\delta_{pq}}{2} Y_{pq}\right)\right]_{Y_{lm}=\bar{Y}_{lm}} \delta Y_{lm}\, dC = 0 . \tag{22}$$

Posto

$$A = \int_C \left(Z - \frac{1}{2}\,\delta_{pq} Y_{pq}\right) dC , \tag{23}$$

la (22) si scrive

$$\delta A = 0 . \tag{24}$$

Essa si legge: *tra tutti gli stati tensionali che sulla configurazione attuale sono in equilibrio con le forze esterne quello effettivo rende stazionario il funzionale* A.

È questo l'enunciato della preannunciata estensione al caso delle deformazioni finite del teorema di Menabrea. Naturalmente, adesso non si può affermare che A sia minimo in corrispondenza allo stato tensionale effettivo dato che la variazione seconda della Z, a differenza di ciò che accade nel caso lineare, dipende dallo stato attuale. Tuttavia, se la configurazione di equilibrio C′ è sufficientemente vicina a quella di riferimento C, si può dimostrare che A è minimo.

Non è difficile riconoscere che nel caso lineare il teorema stabilito si riduce proprio al teorema di Menabrea. Supposto, infatti, di essere, per semplicità, nel caso isotermo, la $\bar{\mathfrak{I}}$ si riduce a una forma quadratica nelle Y_{lm} e si ha

$$Z = -\bar{\mathfrak{I}} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{I}}}{\partial Y_{lm}}\, Y_{lm} = \bar{\mathfrak{I}} . \tag{25}$$

Ne segue

$$A = \int_C \bar{\mathfrak{I}}(Y)\, dC - \frac{1}{2}\int_C \delta_{lm} Y_{lm}\, dC . \tag{26}$$

È evidente che il secondo integrale di (26) altro non è che la somma delle coordinate astatiche di uguali indici della sollecitazione esterna moltiplicata per il volume C [7]. Il secondo integrale di (26) è, pertanto, nella classe degli stati tensionali in equilibrio con l'assegnata sollecitazione esterna, invariabile (nel caso lineare) e può essere soppresso. Si ricade, così, nel teorema classico.

3. Sulla possibilità di inversione del teorema precedente.

Sia $x_r = \psi_r(y_t)$ una configurazione (attuale) tale che nella classe degli stati tensionali soddisfacenti alle (11), (12) ne esista uno, Y'_{lm}, che rende stazionario il funzionale A

Si ponga, formalmente,

$$\varepsilon'_{lm} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial Y_{lm}}\right)_{Y_{lm}=Y'_{lm}} . \tag{27}$$

Ne segue

$$\int_C (2\,\varepsilon'_{lm} + \delta_{lm})\,\delta Y_{lm}\,dC = 0 . \tag{28}$$

Poiché lo stress $Y'_{lm} + \delta Y_{lm}$ è in equilibrio con la sollecitazione esterna, le δY_{lm} verificano le (14), (15). È evidente allora che comunque si scelga la matrice $|M_{t\nu}|$, a elementi dipendenti dalle y_t, le δY_{lm} soddisfacenti alle uguaglianze

$$\psi_{r,l}\,\delta Y_{lm} = e_{rtp}\,e_{m\nu q}\,M_{t\nu,pq} , \tag{29}$$

ove e_{rtp} denota l'indicatore di Ricci, soddisfa alle (14), e, con qualche restrizione per la matrice $|M_{t\nu}|$ che, tuttavia, lascia una larga arbitrarietà di scelta, anche alle (15).

Detto C_{rl} il complemento algebrico dell'elemento $\psi_{r,l}$ nel determinante delle $\psi_{r,l}$ e D il valore (certamente non nullo, anzi positivo) di tale determinante, da (29) si ricava

$$\delta Y_{lm} = \frac{C_{rl}}{D}\,e_{rtp}\,e_{m\nu q}\,M_{t\nu,pq} \tag{30}$$

Posto

$$Q_{rm} = (2\,\varepsilon'_{lm} + \delta_{lm})\,\frac{C_{rl}}{D} , \tag{31}$$

da (28), (30), (31) segue

$$\int_C Q_{rm}\,e_{rtp}\,e_{m\nu q}\,M_{t\nu,pq}\,dC = 0 , \tag{32}$$

valida per ogni scelta della matrice $|M_{t\nu}|$ che permetta di soddisfare alle (15) [ad esempio, per ogni matrice i cui elementi hanno nulle le derivate seconde sul contorno σ di C].

La (32) implica come condizione necessaria e sufficiente per il suo verificarsi

$$Q_{rm,pq}\,e_{rtp}\,e_{m\nu q} = 0 . \tag{33}$$

Vale la pena di segnalare l'analogia formale tra le equazioni (33) e le ben note condizioni di congruenza del caso lineare, ove le Q_{rm} si identificano proprio con il tensore di Cauchy-Green di deformazione.

Esistono, pertanto, tre funzioni v_r delle y_t tali che risulti

$$Q_{rm} = v_{r,m} . \tag{34}$$

Di conseguenza, le (31) danno

$$\varepsilon'_{lm} = \frac{1}{2}\,(v_{r,m}\,\psi_{r,l} - \delta_{lm}) . \tag{35}$$

Si è così dimostrato che le ε'_{lm} definite dalle (27) sono, in corrispondenza alla sollecitazione che rende stazionario il funzionale A, congruenti, esistendo tre funzioni v_r delle y_t da cui esse derivano.

Non si può, tuttavia, affermare che le v_r coincidano con le ψ_r, ma questa è una questione che nel caso lineare dell'inversione del teorema di Menabrea non viene neppure considerata, limitandosi a constatare la congruenza della deformazione subordinata dallo stress minimante [8].

Sulle v_r si può, però, dire subito che la simmetria delle ε'_{lm} impone ad esse le condizioni

$$v_{r,m}\,\psi_{r,l} - v_{r,l}\,\psi_{r,m} = 0 . \tag{37}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] GRIOLI G., *Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'Elastostatica*, « Atti del congresso della S. I. P. S. » dell'estate 1964 (Cagliari - Sassari).

[2] HELLINGER E., *Die allgemeine Ansatze der Mechanik der Kontinuua*, « Enz. Math. Wiss. », *4*, 602–694 (42, 68b, 88, 98).

[3] REISSNER E., *On a variational theorem for finite elastic deformations*, « J. Math. Phys. », *32*, 129–135.

[4] LANGHAAR H., *The principle of complementary energy in nonlinear Elasticity theory*, « Jour. Franklin Inst. », 255–264 (1953).

[5] MANACORDA T., *Sopra un principio variazionale di E. Reissner per la statica dei mezzi continui*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), *9*, 154–159 (1954).

[6] TRUESDELL e NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, « Handbuch der Physik », Band III/3, 327–328 (1965).

[7] SIGNORINI A., *Sopra alcune questioni di Statistica dei sistemi continui*, « Ann. Scuola Norm. Sup. », Pisa, Ser. II, *2*, 3–23 (1933).

[8] FINZI B. e PASTORI M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 315–319.