Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Cataldo Agostinelli

## Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico omogeneo isotropo, elettricamente conduttore, in moto vibratorio sotto l'azione di un campo magnetico. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **44** (1968), n.1, p. 58–62.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_58_0>

**Magnetoelasticità.** — *Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico omogeneo isotropo, elettricamente conduttore, in moto vibratorio sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota II (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — We consider the motion of an electrical conductive elastic body under the action of a magnetic field. We establish the linearized equations of the motion and we show the possibility of asymmetric stress.

4. Continuando con la stessa numerazione le considerazioni della Nota precedente, osserviamo ora che se non facciamo alcuna ipotesi sulla struttura del corpo elastico e sul modo con cui agiscono le cause che determinano l'asimmetria degli sforzi interni, la funzione W, omogenea quadratica in nove variabili, conterrà in generale $9 + \binom{9}{2} = 45$ coefficienti. Ma se ci riferiamo al caso particolarmente interessante per le applicazioni in cui esiste un asse di isotropia, che assumiamo come asse delle $z$, allora la forma quadratica W conterrà soltanto *undici* coefficienti.

Invero in questo caso, come ha dimostrato Somigliana [6], se si passa da un sistema di coordinate $O(xyz)$ a un nuovo sistema $O(x'y'z)$, ottenuto dal precedente con una rotazione arbitraria intorno all'asse $z$, esistono undici, e soltanto undici invarianti quadratici fra le nove componenti $\varepsilon_{ij}, \omega_i$, che sono i seguenti:

$$\begin{gathered}
I_1 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 \quad , \quad I_2 = \varepsilon_{33}^2 \quad , \quad I_3 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\varepsilon_{33}\,, \\
I_4 = \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{23}^2 \quad , \quad I_5 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + \varepsilon_{12}^2 \\
R_1 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad , \quad R_2 = \omega_3^2 \quad , \quad R_3 = \omega_3\,\varepsilon_{33} \quad , \quad R_4 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\omega_3 \\
R_5 = \varepsilon_{31}\,\omega_1 + \varepsilon_{23}\,\omega_2 \quad , \quad R_6 = \varepsilon_{23}\,\omega_1 - \varepsilon_{31}\,\omega_2\,.
\end{gathered} \tag{18}$$

Allora il potenziale elastico W, nell'ipotesi che esso dipenda dalle sei componenti $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ della deformazione e dalle tre componenti $\omega_i$ della rotazione, supposto che esista un asse di isotropia, e questo sia l'asse $z$, sarà funzione lineare degli undici invarianti quadratici $I_1, I_2, \cdots, I_5, R_1, R_2, \cdots, R_6$, e conterrà quindi undici coefficienti.

Il potenziale W sarà dunque della forma

$$\begin{aligned}
W = {} & a_1 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + a_2\,\varepsilon_{33}^2 + a_3 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\varepsilon_{33} + a_4 (\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{23}^2) + \\
& + a_5 [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + \varepsilon_{12}^2] + b_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + b_2\,\omega_3^2 + b_3\,\omega_3\,\varepsilon_{33} + \\
& + b_4 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\omega_3 + b_5 (\varepsilon_{31}\,\omega_1 + \varepsilon_{23}\,\omega_2) + b_6 (\varepsilon_{23}\,\omega_1 - \varepsilon_{31}\,\omega_2)\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1967.

Per le (17) avremo pertanto

$$
(20) \quad
\begin{aligned}
-\Phi_{xx} &= 2\,a_1(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + a_3\,\varepsilon_{33} + 2\,a_5(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) + b_4\,\omega_3 \\
-\Phi_{yy} &= 2\,a_1(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + a_3\,\varepsilon_{33} + 2\,a_5(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}) + b_4\,\omega_3 \\
-\Phi_{zz} &= 2\,a_2\,\varepsilon_{33} + a_3(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) + b_3\,\omega_3 \\
-\Phi_{xy} &= 2\,a_5\,\varepsilon_{12} + 2\,b_2\,\omega_3 + b_3\,\varepsilon_{33} + b_4(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \\
-\Phi_{yx} &= 2\,a_5\,\varepsilon_{12} - 2\,b_2\,\omega_3 - b_3\,\varepsilon_{33} - b_4(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) \\
-\Phi_{yz} &= (2\,a_4+b_6)\,\varepsilon_{23} + b_5\,\varepsilon_{31} + (2\,b_1+b_6)\,\omega_1 + b_5\,\omega_2 \\
-\Phi_{zy} &= (2\,a_4-b_6)\,\varepsilon_{23} - b_5\,\varepsilon_{31} + (b_6-2\,b_1)\,\omega_1 + b_5\,\omega_2 \\
-\Phi_{zx} &= (2\,a_4-b_6)\,\varepsilon_{31} + b_5\,\varepsilon_{23} + b_5\,\omega_1 + (2\,b_1-b_6)\,\omega_2 \\
-\Phi_{xz} &= (2\,a_4+b_6)\,\varepsilon_{31} - b_5\,\varepsilon_{23} + b_5\,\omega_1 - (2\,b_1+b_6)\,\omega_2\,.
\end{aligned}
$$

Le componenti del momento **M** saranno inoltre

$$
(21) \quad
\begin{aligned}
M_x &= \Phi_{yz} - \Phi_{zy} = -2\,b_6\,\varepsilon_{23} - 2\,b_5\,\varepsilon_{31} - 4\,b_1\,\omega_1 = -2\,\frac{\partial W}{\partial\omega_1} \\
M_y &= \Phi_{zx} - \Phi_{xz} = 2\,b_6\,\varepsilon_{31} - 2\,b_5\,\varepsilon_{23} - 4\,b_1\,\omega_2 = -2\,\frac{\partial W}{\partial\omega_2} \\
M_z &= \Phi_{xy} - \Phi_{yx} = -4\,b_2\,\omega_3 - 2\,b_3\,\varepsilon_{33} - 2\,b_4(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}) = -2\,\frac{\partial W}{\partial\omega_3}\,.
\end{aligned}
$$

5. Vogliamo ora mostrare come nello schema considerato rientra il caso delle vibrazioni di un corpo elastico omogeneo isotropo, conduttore elettrico perfetto, immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$, in cui per effetto del movimento si generano delle correnti elettriche e quindi un campo magnetico indotto dello stesso ordine di grandezza dello spostamento $\boldsymbol{s}$, che interagisce col movimento.

In tal caso, trascurando l'azione elettrostatica, sul corpo elastico viene ad agire la forza deflettente di Lorentz data da $\mathbf{J}\wedge\mathbf{B} = \mu\mathbf{J}\wedge\mathbf{H}$, dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente di conduzione, $\mathbf{H}$ il campo magnetico e $\mu$ la permeabilità magnetica. Ma per la prima delle equazioni di Mawxell, essendo anche trascurabile la corrente di spostamento, si ha $\mathbf{J} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$, e quindi $\mathbf{J}\wedge\mathbf{B} = \mu\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H}$.

Alla forza di massa non elettromagnetica $\rho\mathbf{F}$ viene dunque ad aggiungersi l'azione lorentziana $\mu\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H}$, e la classica equazione della dinamica di un corpo elastico omogeneo isotropo [10], diventa:

$$
(22) \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = b^2\Delta_2\,\boldsymbol{s} + (a^2-b^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{s} + \frac{\mu}{\rho}\operatorname{rot}\mathbf{H}\wedge\mathbf{H} + \mathbf{F},
$$

dove $a$, $b$ $(a > b)$, sono rispettivamente le velocità di propagazione delle onde elastiche longitudinali e trasversali.

Alla (22) va associata l'equazione cui soddisfa il campo magnetico $\mathbf{H}$, che nel caso di conduttività elettrica infinita risulta [11]

$$
(23) \qquad \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{H}\wedge\boldsymbol{v}) = 0 \quad , \quad \left(\boldsymbol{v} = \frac{\partial\boldsymbol{s}}{\partial t}\right).
$$

Ora, detto $\boldsymbol{h}$ il campo magnetico indotto, e scegliendo l'asse $z$ nella direzione del campo magnetico uniforme $\mathbf{H}_0$, si ha $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \boldsymbol{h} = \mathrm{H}_0\, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{h}$, essendo $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse $z$. A meno di termini di ordine superiore al primo rispetto ad $\boldsymbol{h}$ ed $\boldsymbol{s}$, la [23] diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} \wedge \mathrm{H}_0\, \boldsymbol{k}\right),$$

da cui, omettendo un arbitrario vettore indipendente dal tempo, ciò che è lecito trattandosi di movimenti vibratori, abbiamo

$$\boldsymbol{h} = \mathrm{H}_0 \operatorname{rot}(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{k}) \tag{24}$$

e pertanto risulta

$$\frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} \approx \frac{\mu \mathrm{H}_0^2}{\rho} \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{k}) \wedge \boldsymbol{k} =$$
$$= c^2 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial z^2} - \operatorname{grad} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{s}}{\partial z} \boldsymbol{k} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s}\right),$$

dove $c^2 = \mu \mathrm{H}_0^2/\rho$ è il quadrato della velocità delle onde magnetodinamiche di Alfvén.

L'equazione (22) diventa allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} &= b^2 \Delta_2 \boldsymbol{s} + (a^2 - b^2 + c^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{s} + \\ &+ c^2 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial z^2} - \operatorname{grad} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial \operatorname{div} \boldsymbol{s}}{\partial z} \boldsymbol{k}\right) + \mathbf{F}\end{aligned} \tag{25}$$

che si può scrivere

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} &= \operatorname{grad} \left\{2\, b^2 \mathrm{D} \frac{d\boldsymbol{s}}{d\mathrm{P}} + (a^2 - 2\, b^2 + c^2) \operatorname{div} \boldsymbol{s} + \right. \\ &\left. + c^2 \left[\left(\boldsymbol{k}\,, \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial z}\right) - (\boldsymbol{k}\,, \operatorname{div} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k}) - \frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\} + \mathbf{F}\end{aligned} \tag{25'}$$

dove $\left(\boldsymbol{k}\,, \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial z}\right)$, $(\boldsymbol{k}\,, \operatorname{div} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k})$ sono *diadi*.

Se allora consideriamo l'omografia vettoriale

$$\begin{aligned}\frac{\Phi}{\rho} &= -\left\{2\, b^2 \mathrm{D} \frac{d\boldsymbol{s}}{d\mathrm{P}} + (a^2 - 2\, b^2 + c^2) \operatorname{div} \boldsymbol{s} + \right. \\ &\left. + c^2 \left[\left(\boldsymbol{k}\,, \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial z}\right) - (\boldsymbol{k}\,, \operatorname{div} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{k}) - \frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\}\end{aligned} \tag{26}$$

l'equazione (25′) assume la forma

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \Phi, \tag{27}$$

che si identifica con la (8).

Dunque nel problema di moto magnetoelastico considerato l'omografia degli sforzi interni, o dello *stress*, è definita dalla (26). Da essa, ricordando che div $\boldsymbol{s} = \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, si ricava

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{xx} &= 2\,b^2\,\varepsilon_{11} + (a^2 - 2\,b^2)\,\theta + c^2\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \\
&= 2\,b^2\,\varepsilon_{11} + (a^2 - 2\,b^2 + c^2)\,\theta - c^2\,\varepsilon_{33} \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{yy} &= 2\,b^2\,\varepsilon_{22} + (a^2 - 2\,b^2)\,\theta + c^2\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = \\
&= 2\,b^2\,\varepsilon_{22} + (a^2 - 2\,b^2 + c^2)\,\theta - c^2\,\varepsilon_{33} \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{zz} &= 2\,b^2\,\varepsilon_{33} + (a^2 - 2\,b^2)\,\theta \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{xy} &= -\frac{1}{\rho}\,\Phi_{yx} = b^2\,\varepsilon_{12} \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{yz} &= b^2\,\varepsilon_{23} \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{zy} &= b^2\,\varepsilon_{23} + c^2\,\frac{\partial v}{\partial z} = \left(b^2 + \frac{1}{2}\,c^2\right)\varepsilon_{23} - \frac{1}{2}\,c^2\,\omega_1 \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{zx} &= b^2\,\varepsilon_{31} + c^2\,\frac{\partial u}{\partial z} = \left(b^2 + \frac{1}{2}\,c^2\right)\varepsilon_{31} + \frac{1}{2}\,c^2\,\omega_2 \\
-\frac{1}{\rho}\,\Phi_{xz} &= b^2\,\varepsilon_{31}\,.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Questi sforzi derivano dal potenziale elastico

$$
\begin{aligned}
\frac{W}{\rho} = \frac{1}{2}\,(a^2 - b^2 + c^2)\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \frac{1}{2}\,a^2\,\varepsilon_{33}^2 + (a^2 - 2\,b^2)\,(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\,\varepsilon_{33} + \\
+ \left(\frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1}{8}\,c^2\right)(\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{32}^2) + \frac{1}{2}\,b^2\,[(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + \varepsilon_{12}^2] + \\
+ \frac{1}{8}\,c^2\,(\omega_1^2 + \omega_2^2) - \frac{1}{4}\,c^2\,(\varepsilon_{23}\,\omega_1 - \varepsilon_{31}\,\omega_2)\,.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Confrontando con la (19) si riconosce che nel caso considerato è

$$
\begin{gathered}
\frac{a_1}{\rho} = \frac{1}{2}\,(a^2 - b^2 + c^2) \quad , \quad \frac{a_2}{\rho} = \frac{1}{2}\,a^2 \quad , \quad \frac{a_3}{\rho} = a^2 - 2\,b^2, \\
\frac{a_4}{\rho} = \frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1}{8}\,c^2 \quad , \quad \frac{a_5}{\rho} = \frac{1}{2}\,b^2 \quad , \quad \frac{b_1}{\rho} = \frac{1}{8}\,c^2, \\
b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0 \quad , \quad \frac{b_6}{\rho} = -\frac{1}{4}\,c^2.
\end{gathered}
$$

La (29), ordinando opportunamente, si può scrivere anche

$$
\begin{aligned}
\frac{W}{\rho} = \frac{1}{2}\,(a^2 - 2\,b^2)\,\theta^2 + b^2\left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}\,(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^3 + \varepsilon_{31}^2)\right] + \\
+ \frac{1}{2}\,c^2\left[(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \frac{1}{4}\,(\varepsilon_{23} - \omega_1)^2 + \frac{1}{4}\,(\varepsilon_{31} + \omega_2)^2\right].
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Il potenziale W risulta dunque uguale alla somma dell'ordinario potenziale dei corpi elastici omogenei completamente isotropi e del potenziale relativo alla asimmetria degli sforzi interni, dovuta all'azione del campo magnetico.

In virtù delle (21) le componenti del momento delle coppie agenti sugli elementi di volume risultano:

$$
\begin{aligned}
&M_x = \frac{1}{2}\,\rho c^2\,(\varepsilon_{23} - \omega_1) = -2\,\frac{\partial W}{\partial \omega_1} \\
(31)\qquad &M_y = -\frac{1}{2}\,\rho c^2\,(\varepsilon_{31} + \omega_2) = -2\,\frac{\partial W}{\partial \omega_2} \\
&M_z = 0.
\end{aligned}
$$

Esse derivano dalla parte del potenziale elastico dovuto al campo magnetico e dipendono sia dalle componenti della rotazione e sia dai coefficienti di scorrimento mutuo della dilatazione pura. In base ai risultati ottenuti si ha infine che per il problema considerato l'equazione che dovrà essere verificata sulla superficie limite del corpo elastico, in virtù della (7) e della (26), risulta

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad &\frac{\boldsymbol{f}}{\rho} + 2\,b^2\,D\,\frac{d\boldsymbol{s}}{dP}\,\boldsymbol{n} + (a^2 - 2\,b^2 + c^2)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n} + \\
&+ c^2\left[\gamma\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial z} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k}\right) - \frac{\partial w}{\partial z}\,\boldsymbol{n}\right] = 0,
\end{aligned}
$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore della normale interna alla superficie limite, e $\gamma$ è la sua componente secondo l'asse $z$.

## Riferimenti bibliografici.


[1] Voigt, *Theoretische Studien über die Elasticität sverhältnisse der Krystalle*, « Abhand. K. Ges. », Göttingen, 1887.

[2] Larmor, *The Equations of Propagation of Disturbances in Girostatically Loaded Media and of the Circular Polarization of Light*, « Proc. London Math. Soc. », 1891.

[3] Lord Kelvin, « Baltimore Lectures », London 1904 (Lecture XX).

[4] Combiebac, *Sur les équations générales de l'elasticité*, « Bulletin de la Soc. Math. de France », t. XXX, 1902.

[5] C. Somigliana, *Sopra un'estensione della teoria della elasticità*, « Rend. Accad. Lincei », vol. 19, 1910.

[6] C. Somigliana, *Sul potenziale elastico*, « Annali di Matematica », vol. 7, 1901.

[7] G. Grioli, *Elasticità asimmetrica*, « Annali Matem. Pura e Applicata », Serie IV, *50*, 1960.

[8] C. Burali Forti e R. Marrolongo, *Analisi Vettoriale Generale*, Cap. I, § 1, nn. 7, 8, 9, 10. Zanichelli, Bologna, 1929.

[9] J. W. Dunkin e A. C. Eringen, *On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid*, « International Journal of Engineering Science », Vol. I, n. 4, Dec. 1963.

[10] C. Agostinelli, *Istituzioni di Fisica Matematica*, P. III, Cap. III, § 8, Zanichelli, Bologna, 1962.

[11] C. Agostinelli, *Magnetofluidodinamica*, Cap. VI, § 1, n. 1. Edizioni Cremonese, Roma, 1966.

[12] C. Agostinelli, *Sulla dinamica dei corpi elastici omogenei isotropi, elettricamente conduttori, soggetti a un campo magnetico*. In corso di stampa nella Rivista « Meccanica » della A.I.M.E.T.A.