
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

SERGIS BRUNO, MARIO CASTAGNINO

**Una proprietà caratteristica per la linearità delle
connessioni di Kawaguchi**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 44 (1968), n.1, p. 54–57.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_54_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Una proprietà caratteristica per la linearità delle connessioni di Kawaguchi.* Nota di SERGIS BRUNO e MARIO CASTAGNINO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In a differentiable manifold, endowed with a Kawaguchi connection, the derivative of a tensor (of rank ≥ 2) is a tensor if, and only if, the connection is a linear one.

1. — È noto che, su una varietà differenziabile V_n di classe C^r ($r \geq 2$), a connessione lineare, i derivati covarianti dei tensori risultano tensori; inoltre, la derivazione covariante soddisfa la regola ordinaria della derivazione di un prodotto e per gli scalari si riduce alla derivata ordinaria. Queste proprietà non sono soddisfatte, in generale, per le connessioni non-lineari di Kawaguchi. Lo scopo del presente Lavoro è quello di provare che le suddette proprietà sono caratteristiche per la linearità delle connessioni di Kawaguchi.

2. — Ricordiamo la definizione e le principali proprietà di una connessione non-lineare secondo A. Kawaguchi [1]. Se U è un intorno coordinato della varietà V_n , v un vettore contravariante dello spazio tangente τ_n , nel punto x ; una connessione non-lineare viene definita da un insieme di n forme differenziali di grado uno $\omega(x, U, v)$ in U , dove $x \in U$, tali che:

(I) I coefficienti delle forme $\omega(x, U, v)$ sono funzioni scalari di classe $r-1$ in $U \times \tau_n$.

(II) Ognuna delle forme $\omega(x, U, v)$ è omogenea, di grado uno, rispetto al vettore v , ossia, $\forall \rho$,

$$\omega(x, U, \rho v) = \rho \omega(x, U, v).$$

(III) Per $x = x'$, $x \in U \cap U'$ si ha:

$$\omega(x, U, v) = A \omega'(x', U', v') - dA v',$$

ove ogni elemento della matrice A , del cambiamento di carta, è una funzione differenziabile del punto in $U \cap U'$.

In una base naturale le n forme differenziali possono essere rappresentate da:

$$\omega_i^j(x, v) dx^i, \quad \text{per } x \in U, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

La (III) ci fornisce il cambiamento dei coefficienti della connessione di fronte a un cambiamento di carta. Precisamente si ha:

$$(I) \quad \omega_i^j(x, v) dx^i = a_{k'}^j(x') \omega_{i'}^{k'}(x', v') dx^{i'} - d a_{k'}^j v^{k'},$$

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1968.

ossia, posto $a_{k'h'}^{j'} = \partial_{h'} a_{k'}^j$, risulta:

$$(2) \quad \omega_i^j(x, v) = a_{k'}^{j'}(x') \omega_{l'}^{k'}(x', v') a_i^{l'}(x') - a_{k'h'}^{j'}(x') a_i^{h'}(x') v^{k'},$$

$$(3) \quad \omega_{i'}^{j'}(x', v') = a_k^{j'}(x) \omega_l^k(x, v) a_{i'}^l(x) - a_{kh}^{j'}(x) a_{i'}^h(x) v^k.$$

Una connessione non-lineare permette di definire, nel modo seguente, il differenziale assoluto:

$$(4) \quad \delta f = df \quad (f \text{ scalare}),$$

$$(5) \quad \delta v^j = dv^j + \omega_i^j(x, v) dx^i,$$

$$(6) \quad \delta T^{ij} = dT^{ij} + \omega_l^{ij}(x, T^{**}) dx^l,$$

ove è:

$$(7) \quad \omega_l^{ij}(x, T^{**}) = \omega_l^i(x, T^{*j}) + \omega_l^j(x, T^{i*}),$$

e gli asterischi vanno al posto degli indici muti. Per le componenti dei derivati del vettore (v^i) e del tensore (T^{ij}) si ha allora:

$$(8) \quad \delta_k v^j = \partial_k v^j + \omega_k^j(x, v),$$

$$(9) \quad \delta_k T^{ij} = \partial_k T^{ij} + \omega_k^{ij}(x, T^{**}).$$

Queste definizioni sono date in maniera tale che si soddisfi la regola del prodotto:

$$(10) \quad \delta_k (v^j \omega^i) = (\delta_k v^j) \omega^i + v^j (\delta_k \omega^i),$$

la proprietà (II) ci permette di asserire che la regola del prodotto è soddisfatta anche nel caso di uno scalare per un vettore.

Inoltre posto:

$$(11) \quad \omega_{ik}^j = \frac{\partial}{\partial v^k} \omega_i^j,$$

risulta, per la (II);

$$(12) \quad \omega_i^j = \omega_{ik}^j v^k.$$

Notiamo che la (I) è tale che, per ogni vettore (v^i) , $(\delta_k v^j)$ risulta un tensore. Infatti, cambiando carta, si ha:

$$\partial_{k'} v^{j'} = a_h^{j'} a_{k'}^l \partial_l v^h + a_{hl}^{j'} a_{k'}^h v^l,$$

e per le (3):

$$\omega_{k'}^{j'}(x', v') = a_h^{j'} \omega_l^h(x, v) a_{k'}^l - a_{hl}^{j'} a_{k'}^h v^l,$$

e quindi da:

$$\delta_{k'} v^{j'} = \partial_{k'} v^{j'} + \omega_{k'}^{j'}(x', v'),$$

si ottiene:

$$\delta_{k'} v^{j'} = a_{k'}^{j'} a_l^h (\partial_l v^h + \omega_l^h(x, v)) = a_{k'}^{j'} a_l^h \delta_l v^h,$$

Inversamente, le proprietà (II) e (III) si desumono dalla regola del prodotto e dal fatto che $(\delta_k v^i)$ sia un tensore.

3. - Ci rimane da esaminare qual'è la condizione perché $(\delta_k T^{ij})$ sia anche esso un tensore. All'uopo ci proponiamo di provare il seguente:

TEOREMA. *Condizione necessaria è sufficiente perché, per ogni tensore (T^{ij}) , le $\delta_k T^{ij}$, date dalla (9), siano le componenti di un tensore è che:*

$$\omega_i^j(x, v) = \Gamma_{ik}^j v^k,$$

dove Γ_{ki}^j sono le componenti di una connessione lineare.

Dimostrazione. La condizione è ovviamente sufficiente. Proviamone la necessità.

Effettuiamo un cambiamento di carta. Nella prima carta sussiste la (9), nella seconda sussiste la:

$$(13) \quad \delta_{k'} T^{i'j'} = \partial_{k'} T^{i'j'} + \omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i'}),$$

Risulta:

$$(14) \quad \partial_{k'} T^{i'j'} = a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \partial_h T^{mn} + a_{mh}^{i'} a_{k'}^h a_n^{j'} T^{mn} + a_{nl}^{j'} a_m^{i'} a_{k'}^l T^{mn}.$$

Se per ogni tensore (T^{ij}) , le $\delta_k T^{ij}$, date dalle (9), sono le componenti di un tensore, dev'essere:

$$\delta_{k'} T^{i'j'} = a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \delta_k T^{mn},$$

pertanto dalle (13) e (14) si ha

$$\begin{aligned} \omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i'}) &= a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \delta_k T^{mn} - a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \partial_h T^{mn} - a_{mh}^{i'} a_{k'}^h a_n^{j'} T^{mn} - a_{nl}^{j'} a_m^{i'} a_{k'}^l T^{mn} = \\ &= a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h [\delta_h T^{mn} - \partial_h T^{mn}] - a_{mh}^{i'} a_{k'}^h a_n^{j'} T^{mn} - a_{nl}^{j'} a_m^{i'} a_{k'}^l T^{mn}, \end{aligned}$$

e quindi, in forza delle (9):

$$(15) \quad \omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i'}) = a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \omega_h^{mn}(x, T^{**}) - a_{mh}^{i'} a_{k'}^h a_n^{j'} T^{mn} - a_{nl}^{j'} a_m^{i'} a_{k'}^l T^{mn}.$$

Dall'altro canto, per le (7), scritta nella seconda carta, si ha:

$$\omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i'}) = \omega_{k'}^{i'}(x', T^{*j'}) + \omega_{k'}^{j'}(x', T^{*i'}),$$

e quindi, in forza delle (3), risulta:

$$\omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i'}) = a_m^{i'} a_{k'}^h \omega_k^m(x, T^{*j'}) - a_{mh}^{i'} a_{k'}^h T^{mj'} + a_m^{j'} a_{k'}^h \omega_n^m(x, T^{*i'}) - a_{mh}^{j'} a_{k'}^h T^{i'm},$$

cioè si ha:

$$(16) \quad \omega_{k'}^{i'j'}(x', T^{*i*}) = \\ = a_m^{i'} a_{k'}^h \omega_h^m(x, a_i^{j'} T^{*i}) - a_{mh}^{i'} a_{k'}^h a_l^{j'} T^{ml} + a_m^{j'} a_{k'}^h \omega_h^m(x, a_j^{i'} T^{j*}) - a_{mh}^{j'} a_{k'}^h a_l^{i'} T^{lm}.$$

Dalle (15), (16) e (7) segue:

$$a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h [\omega_h^m(x, T^{*n}) + \omega_h^n(x, T^{m*})] = \\ = a_m^{i'} a_{k'}^h \omega_h^m(x, a_i^{j'} T^{*i}) + a_m^{j'} a_{k'}^h \omega_h^m(x, a_j^{i'} T^{j*}),$$

che, in forza delle (11) e (12), diventa:

$$a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \omega_{hs}^m(x, T^{*n}) T^{sn} + a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h \omega_{hs}^n(x, T^{m*}) T^{ms} = \\ = a_m^{i'} a_{k'}^h \omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i}) a_n^{j'} T^{sn} + a_n^{j'} a_{k'}^h \omega_{hs}^n(x, a_j^{i'} T^{j*}) a_m^{i'} T^{ms}.$$

Dunque si ha:

$$a_m^{i'} a_n^{j'} a_{k'}^h [\omega_{hs}^m(x, T^{*n}) T^{sn} + \omega_{hs}^n(x, T^{m*}) T^{ms} - \omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i}) T^{sn} - \\ - \omega_{hs}^n(x, a_j^{i'} T^{j*}) T^{ms}] = 0.$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene subito che, qualsiasi sia il tensore (T^{ij}) , risulta:

$$(17) \quad T^{sn} [\omega_{hs}^m(x, T^{*n}) - \omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i})] = T^{ms} [\omega_{hs}^n(x, a_j^{i'} T^{j*}) - \omega_{hs}^n(x, T^{m*})].$$

La (17) è valida, in particolare, per tensori simmetrici, non singolari, e per $m = n$. In tal caso la (17) diventa:

$$T^{ms} [\omega_{hs}^m(x, T^{*m}) - \omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i})] = 0,$$

ed infine:

$$\omega_{hs}^m(x, T^{*m}) = \omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i}).$$

Dunque le $\omega_{hs}^m(x, a_i^{j'} T^{*i})$ sono indipendenti dagli $a_i^{j'}$, ossia dalle variabili (v^i) , ricordando la (12), le ω_k^m risultano lineari in (v^i) . Ne segue l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. KAWAGUCHI, *On the theory of non-linear connections. I. - Introduction to the theory of general non-linear connections*, Tensor (new series), vol. 2, pp. 123-142, August 1952.
- [2] A. KAWAGUCHI, *On the theory of non-linear connections. II. - Theory of Minkowski space and of non-linear connections in a Finsler space*, Tensor (new series), vol. 6, pp. 165-199, December 1956.