Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Klaus Keimel

Demi-Groupes partiellement ordonnés de deuxième et troisième espèce

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.1, p. 21–33.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_21_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Matematica. — *Demi-Groupes partiellement ordonnés de deuxième et troisième espèce.* Nota di KLAUS KEIMEL, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si estendono definizioni e risultati noti sugli m-semigruppi, con riferimento al caso più generale di semigruppi muniti di un ordinamento parziale.

Nous nous proposons d'étudier dans cette note une classe de demi-groupes ordonnés généralisés que nous appellerons m-demi-groupes. Plusieurs auteurs ont déjà contribué à cette étude: ainsi Shepperd [7] a considéré cette notion dans le cas des groupes munis d'un ordre total, Andrus et Burton [1] dans le cas des groupes munis d'un ordre filtrant, Clifford [3] et Kontorovic et Kokorin [6] dans le cas des groupes munis d'un ordre partiel, Clifford [2] dans le cas des demi-groupes commutatifs munis d'un ordre total et Gilder [4] et l'auteur [5] dans le cas des demi-groupes munis d'un ordre total. Nous allons généraliser les définitions et quelques résultats de ces auteurs en considérant des demi-groupes munis d'un ordre partiel. Nous ne citerons pas en détail les théorèmes dont nos résultats sont des généralisations; mais il convient de souligner l'importance des idées de Clifford.

1. DEFINITIONS ET QUELQUES PROPRIETES ELEMENTAIRES.

1.1. DÉFINITION. Soit D un demi-groupe muni d'une relation d'ordre $\leqq$ (non nécessairement total). Un élément a de D est appelé *conserveur à droite* (resp. *inverseur à droite*) si la translation $x \to xa$ est une application isotone (resp. anti-isotone) de D. Un élément e de D est appelé *égaliseur à droite* si e est à la fois un conserveur et un inverseur à droite de D. On note C_d, I_d et E_d les ensembles des conserveurs, inverseurs et égaliseurs à droite de D.

La composition de deux applications isotones ou de deux applications anti-isotones étant isotone et la composition d'une application isotone et d'une application anti-isotone étant anti-isotone, on a:

$$(1) \qquad I_d I_d \cup C_d C_d \subseteq C_d \quad \text{et} \quad I_d C_d \cup C_d I_d \subseteq I_d .$$

Par conséquent, C_d et $S_d = C_d \cup I_d$ sont des sous-demi-groupes de D. Les égaliseurs à droite forment un idéal de S_d; car

$$S_d E_d = (C_d \cup I_d)(C_d \cap I_d) = C_d (C_d \cap I_d) \cup I_d (C_d \cap I_d) \subseteq C_d \cap I_d = E_d$$

et de même $E_d S_d \subseteq E_d$. Si D est discrètement ordonné, $D = E_d$.

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1967.

Dans un ensemble ordonné D on peut introduire une relation d'équivalence μ par $a\mu b$ si et seulement s'il existe une famille finie $a=x_0, x_1, \cdots, x_n=b$ d'éléments de D telle que x_{j-1} soit comparable à x_j pour tout $j = 1, \cdots, n$. Si l'on ordonne S/μ discrètement, l'application canonique $S \to S/\mu$ est isotone. La classe $\bar{x}$ d'un élément x de D modulo μ est appelé l'o*-composante* de x dans D. Si D est constitué d'une seule classe $\bar{x}$, D est appelé o*-connexe*.

On aurait aussi pu dire qu'un élément a d'un demi-groupe D muni d'une relation d'ordre est un conserveur à droite, si

(2) $$\text{Pour tout } x, y \in D, x \leqq y \text{ entraine } xa \leqq ya,$$

et que a est un inverseur à droite, si

(3) $$\text{Pour tout } x, y \in D, x \leqq y \text{ entraine } xa \geqq ya.$$

Par conséquent, pour tout $s \in S_d$, x_{j-1} comparable à x_j entraine $x_{j-1}s$ comparable à $x_j s$. On en tire que $a\mu b$ entraine $as\mu bs$ pour tout $a, b \in D$, $s \in S_d$, c'est-à-dire que les o-composantes de D sont invariantes par les translations à droite par des éléments de S_d.

D'après (2) et (3), les égaliseurs à droite e de D sont caractérisés par

(4) $$\text{Pour tout } x, y \in D, x \text{ comparable à } y \text{ entraine } xe = ye,$$

ce qui justifie la notation. Par conséquent, un élément e de D est un égaliseur à droite si et seulement si $a\mu b$ entraine $ae = be$ pour tout $a, b \in D$. En particulier, si D est o-connexe, $e \in D$ est un égaliseur à droite de D si et seulement si $De = e^2$. Puisque $e^2 \in D$, la propriété $De = e^2$ entraine $e^2 = e^3$ et $Dee = e^3 = e^2$, ce qui signifie que e^2 est un zéro à droite de D. Réciproquement, si D possède un zéro à droite, celui-ci est sûrement un égaliseur à droite.

Nous résumons:

1.2. PROPOSITION. *Si* D *est un demi-groupe muni d'une relation d'ordre, l'ensemble* S_d *des conserveurs et inverseurs à droite de* D *est un sous-demi-groupe. Les o-composantes de* D *sont invariantes par les translations à droite par des éléments de* S_d. *Un élément* e *de* D *est un égaliseur à droite si et seulement si* $\bar{x}e$ *est réduit à un seul élément pour toute o-composante* $\bar{x}$ *de* D; *l'ensemble* E_d *des égaliseurs à droite est un idéal de* S_d. *Si* D *est o-connexe,* $E_d = \{e \in D ; De = e^2\}$ *et* E_d *est non-vide si et seulement si* D *possède un zéro à droite.*

Si $I_d = S_d$, tout conserveur à droite est un égaliseur à droite et $S_d S_d = I_d I_d \subseteq C_d = E_d$. Si, de plus, D est o-connexe, $S_d S_d S_d \subseteq S_d E_d = \{e^2 ; e \in E_d\}$, ce qui est l'ensemble des zéros à droite de D.

D'une façon duale on définit les ensembles C_g, I_g et E_g des conserveurs, inverseurs et égaliseurs à gauche de D et on note $S_g = C_g \cup I_g$. Evidemment, le dual de la proposition 1.2 est valable. Nous allons noter $C = C_d \cap C_g$, $I = I_d \cap I_g$ et $E = E_d \cap E_g = C \cap I$ les ensembles des conserveurs, inverseurs et égaliseurs (bilatères) de D et nous posons $S = C \cup I$. On tire de (1) et son dual:

(5) $$CC \cup II \subseteq C \quad \text{et} \quad IC \cup CI \subseteq I.$$

Par conséquent, C et S sont des sous-demi-groupes de D. Remarquant que si un demi-groupe D possède un zéro à droite O_d et un zéro à gauche O_g, alors $O_d = O_g$ et D possède un zéro, la proposition 1.2. entraine:

1.3. COROLLAIRE. *Si l'ensemble* E *des égaliseurs de* D *n'est pas vide*, E *est un idéal de* $S = C \cup I$. *Si* D *est o-connexe*, $E = \{e \in D \; ; eD = De = e^2\}$, *et* E *est non vide si et seulement si* D *possède un zéro.*

1.2 et 1.3 montrent que dans un m-demi-groupe o-connexe avec un élément unité, tout égaliseur à droite est un zéro à droite et tout égaliseur est un zéro.

1.4. DÉFINITION. Un demi-groupe D muni d'une relation d'ordre est un m-*demi-groupe*, si $D = S_d = S_g$, c'est-à-dire si tout élément de D est un conserveur ou inverseur à gauche et à droite. Si tout élément de D est un conserveur, D est un demi-groupe ordonné au sens habituel que nous appellerons aussi m-*demi-groupe de première espèce*. Nous dirons que D est un m-*demi-groupe de deuxième espèce*, si $D = C \cup I$ et $D \neq C$, c'est à-dire si tout élément de D est un conserveur ou inverseur et si D n'est pas un m-demi-groupe de première espèce. Finalement, un m-demi-groupe non de première ou deuxième espèce est appelé m-*demi-groupe* de *troisième espèce.*

Remarquons que, si D est un demi-groupe muni d'un ordre, l'ensemble $S_d \cap S_g$ est un m-demi-groupe, et $S = C \cup I$ est un m-demi-groupe de première ou deuxième espèce.

Ces définitions sont des généralisations de définitions de Clifford [2, 3] et Gilder [4]. A toute relation d'ordre on peut associer une relation « entre »: On dit que y est entre x et z si $x \leqq y \leqq z$ ou $x \geqq y \geqq z$. Si D est un demi-groupe muni d'une relation d'ordre, nous dirons qu'un élément a de D *conserve la relation entre à droite*, si pour tout $x, y, z \in D$,

$$x \text{ entre } y \text{ et } z \text{ entraine } xa \text{ entre } ya \text{ et } za.$$

Gilder [4] a montré qu'un *demi-groupe* D muni d'un ordre total tel que tout élément de D conserve la relation entre à droite et à gauche, est un m-*demi-groupe*. Ce résultat admet une généralisation.

Soit D un *demi-groupe* muni d'une relation d'ordre. Notons T_d l'ensemble des éléments de D qui conservent la relation entre à droite. (2) et (3) montrent que S_d est contenu dans T_d. On vérifie sans peine que T_d est un sous-demi-groupe de D.

1.4. LEMME. *Si* D *est muni d'un ordre filtrant*, $T_d = S_d$.

Démonstration. Soit $a \in T_d$. Remarquons d'abord que la translation à droite $x \to xa$ est isotone ou anti-isotone sur tout sous-ensemble totalement ordonné de D. Supposons que a n'est ni un conserveur ni un inverseur à droite. Alors il existe $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ dans D tels que $x_1 a < x_2 a$ et $y_1 a > y_2 a$. L'ordre de D étant supposé filtrant, il existe dans D un minorant z_1 de x_1 et y_1 et un majorant z_2 de x_2 et y_2. Puisque a conserve la relation entre à droite, $x_1 a < x_2 a$ entraine $z_1 a \leqq x_1 a < x_2 a \leqq z_2 a$ et $y_1 a > y_2 a$ entraine

$z_1 a \geqq y_1 a > y_2 a \geqq z_2 a$, ce qui est impossible. Donc tout élément a de T_d est un conserveur ou inverseur à droite.

Ce lemme entraine:

1.5. PROPOSITION. *Un demi-groupe* D *muni d'une relation d'ordre filtrant est un m-demi-groupe si et seulement si tout élément de* D *conserve la relation « entre » à gauche et à droite.*

Le lemme suivant est fondamental pour les sections 2 et 3. Soit D un demi-groupe muni d'une relation d'ordre; soient i_g, i_d, c_g, c_d des éléments de I_g, I_d, C_g, C_d respectivement.

1.6. LEMME. *Si* $i_g \leqq c_g$ *et* $c_d \leqq i_d$, *alors*

$$i_g c_d = c_g c_d = c_g i_d = i_g i_d .$$

On a la même conclusion si $i_g \geqq c_g$ *et* $c_d \geqq i_d$.

Démonstration. Les hypothèses $i_g \leqq c_g$ et $c_d \leqq i_d$ entraînent

$$i_g c_d \leqq c_g c_d \leqq c_g i_d \leqq i_g i_d \leqq i_g c_d ,$$

d'où l'égalité.

1.7. COROLLAIRE. *Si* c, c' *sont des conserveurs et* i, i' *des inverseurs tels que* $i < c$ *et* $c' < i'$, *alors*

$$ic' = cc' = ci' = ii' \qquad \text{et} \qquad c' i = c' c = i' c = i' i,$$

et l'ensemble des égaliseurs de D *n'est pas vide.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme et du fait que $ic' \in I$ et $cc' \in C$ et que $I \cap C$ est l'ensemble des égaliseurs.

Nous nous intéresserons principalement aux éléments de $S = S_g \cap S_d$. Ceux-ci sont les éléments qui appartiennent à l'un des ensembles suivants:

$A_{00} = C$, l'ensemble des conserveurs bilatères,

$A_{11} = I$, l'ensemble des inverseurs bilatères,

$A_{10} = I_g \cap C_d$, l'ensemble des conserveurs à droite et inverseurs à gauche,

$A_{01} = C_g \cap I_d$, l'ensemble des inverseurs à droite et conserveurs à gauche.

Les règles (1) donnent:

$$A_{i,j} A_{k,l} \subseteq A_{i+k,j+l} , \tag{6}$$

si l'on convient d'additionner les indices modulo 2. Cette formule entraine que si deux des ensembles A_{11}, A_{10} et A_{01} ne sont pas vides, les quatre ensembles $A_{i,j}$ ne sont pas vides. Dans un m-demi-groupe de troisième espèce au moins l'un des ensembles A_{01} et A_{10} est non vide par définition; par conséquent, dans un m-demi-groupe de troisième espèce les $A_{i,j}$ sont tous non vides si et seulement si $A_{11} = I \neq \varnothing$. Nous voulons déterminer la position des ensembles $A_{i,j}$ les uns par rapport aux autres.

Nous convenons que les lettres $a_{i,j}, b_{i,j}, \cdots$ désignent des éléments de $A_{i,j}$. Nous écrirons $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ si $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ ou $x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$. Ainsi, x comparable à y s'écrit $Z(x, y)$.

Si $a_{00} \leqq a_{10}$, alors, $a_{00}^2 \leqq a_{00} a_{10} \leqq a_{10}^2 \leqq a_{10} a_{00}$. Si $a_{00} \geqq a_{10}$, alors $a_{00}^2 \geqq a_{00} a_{10} \geqq a_{10}^2 \geqq a_{10} a_{00}$. Par conséquent

(7) $Z(a_{00}, a_{10})$ *entraîne* $Z(a_{00}^2, a_{00} a_{10}, a_{10}^2, a_{10} a_{00})$.

Puisque $b_{00} = a_{00}^2$ et $c_{00} = a_{10}^2$ sont des éléments de A_{00}, et $b_{10} = a_{00} a_{10}$ et $c_{10} = a_{10} a_{00}$ des éléments de A_{10}, nous avons:

(8) *Toute relation* $Z(a_{00}, a_{10})$ *entraîne l'existence d'une relation*

$$Z(b_{00}, b_{10}, c_{00}, c_{10}).$$

Des raisonnements analogues montrent plus généralement:

(9) *Toute relation* $Z(a_{j,j}, a_{i,i+1})$ *entraîne l'existence d'une relation*

$$Z(b_{j,j}, b_{i,i+1}, c_{j,j}, c_{i,i+1}).$$

La définition suivante nous sera utile:

1.8. DÉFINITION. Deux sous-ensembles A et B d'un ensemble ordonné sont appelés *parallèles*, si aucun élément de A n'est comparable à un élément de B; ils sont appelés *comparables*, s'ils ne sont pas parallèles et si soit $a \leqq b$ pour tout couple d'éléments comparables $a \in A$, $b \in B$, soit $a \geqq b$ pour tout tel couple; finalement, A et B sont appelés *complètement comparables*, s'ils sont comparables et si tout élément de A est comparable à tout élément de B. Remarquons que, dans les trois cas, A et B sont convexes dans $A \cup B$. Si deux sous-ensembles complètement comparables ne sont pas disjoints, ils ont un seul élément commun, et cet élément est comparable à tout élément de leur réunion.

1.9. LEMME. *Si* $A_{11} \neq \emptyset$ *et si* $A_{j,j}$ *et* $A_{i,i+1}$ *sont parallèles*, $A_{j+1,j+1}$ *et* $A_{i+1,i}$ *sont aussi parallèles.*

En effet, si $A_{j+1,j+1}$ et $A_{i+1,i}$ ne sont pas parallèles, il existe une relation de la forme $Z(a_{j+1,j+1}, a_{i+1,i})$, ce qui entraîne $Z(a_{j+1,j+1} a_{11}, a_{i+1,i} a_{11})$ pour tout $a_{11} \in A_{11}$. Or, $a_{j+1,j+1} a_{11} \in A_{j,j}$ et $a_{i+1,i} a_{11} \in A_{i,i+1}$. Par conséquent, $A_{j,j}$ et $A_{i+1,i}$ ne sont pas parallèles.

2. *m*-DEMI-GROUPES SANS EGALISEURS.

Maintenant nous pouvons énoncer nos résultats sur les *m*-demi-groupes sans égaliseurs. Le théorème s'applique même à une situation plus générale.

2.1. THÉORÈME. *Soit* D *un demi-groupe qui est un ensemble ordonné sans égaliseur.*

a) *Les ensembles* $A_{00} = C$ *des conserveurs et* $A_{11} = I$ *des inverseurs sont parallèles ou comparables.*

b) *Si* $A_{10} = I_g \cap C_d$ *ou* $A_{01} = C_g \cap I_d$ *n'est pas vide, les ensembles* $A_{00} \cup A_{i,i+1}$ *et* $A_{11} \cup A_{i+1,i}$ *sont parallèles pour* $i = 0$ *ou* $i = 1$.

Supposons, de plus, que D *n'a pas d'égaliseur ni à droite, ni à gauche.*

c) *Si pour un couple* i, j *les ensembles* $A_{j,j}$ *et* $A_{i,i+1}$ *ne sont pas parallèles, aucun des ensembles* $A_{i,j}$ *n'est convexe dans* $S = S_g \cap S_d = \cup A_{i,j}$.

d) *Si* $A_{10} \neq \varnothing$ *ou* $A_{01} \neq \varnothing$ *et si pour tout conserveur* c *il existe un conserveur* c' *tel que* cc' *est minoré par un conserveur dans le centre de* D, *alors les ensembles* $A_{i,j}$ *sont deux à deux parallèles.*

Démonstration. a) Si I et C ne sont pas parallèles, il existe un inverseur i et un conserveur c tels que, par exemple, $i < c$. Le demi-groupe D n'ayant pas d'égaliseur, le corollaire 1.7 montre qu'il n'y a pas de conserveur c' ni d'inverseur i' tels que $c' < i'$. Par conséquent C et I sont comparables.

b) Montrons d'abord que A_{10} et A_{01} sont parallèles: supposons que $a_{10} \in A_{10}$ et $a_{01} \in A_{01}$ soient comparables. On peut appliquer le lemme 1.6. pour $i_g = c_d = a_{10}$ et $c_g = i_d = a_{01}$, et on obtient

$$a_{10}^2 = a_{01}\, a_{10} = a_{01}^2 = a_{10}\, a_{01}.$$

Or, a_{10}^2 est un conserveur et $a_{10}\, a_{01}$ un inverseur; par conséquent, l'égalité montre l'existence d'un égaliseur, ce qui est exclu par hypothèse.

Supposons maintenant que D contienne un élément $a_{10} \in A_{10}$ et qu'un conserveur a_{00} soit comparable à un inverseur a_{11}. Alors $a_{10}\, a_{11}$ et $a_{10}\, a_{00}$ sont deux éléments comparables, l'un appartenant à A_{01}, l'autre à A_{10}. Or, ceci est impossible puisque A_{01} et A_{10} sont parallèles. Par conséquent, si A_{10} (ou A_{01}) n'est pas vide, A_{00} et A_{11} sont parallèles.

Montrons que A_{00} est parallèle à A_{10} ou à A_{01}: Si ni A_{10} ni A_{01} ne sont parallèles à A_{00}, il existe $a_{00}, b_{00} \in A_{00}$ et $a_{10} \in A_{10}$, $a_{01} \in A_{01}$ tels que

$$a_{01} \leqq a_{00} \qquad \text{et} \qquad b_{00} \leqq a_{10}.$$

Mais alors,

$$A_{01} \ni b_{00}\, a_{01} \leqq b_{00}\, a_{00} \leqq a_{10}\, a_{00} \in A_{10},$$

ce qui est impossible puisque A_{01} et A_{10} sont parallèles.

Nous savons donc que A_{00} est parallèle à A_{11} et à $A_{i,i+1}$ pour $i = 0$ ou $i = 1$. D'après le lemme 1.9, A_{11} est parallèle à $A_{i+1,i}$. Ainsi (*b*) est démontré.

c) Les éléments de $A_{j,j} \cap A_{i,i+1}$ sont des égaliseurs à droite ou à gauche. Nos hypothèses entraînent donc que $A_{j,j} \cap A_{i,i+1} = \varnothing$ pour tout i, j. Si $A_{j,j}$ et $A_{i,i+1}$ ne sont pas parallèles, il existe une relation

$$Z\,(b_{j,j}\,,\, b_{i,i+1}\,,\, c_{j,j}\,,\, c_{i,i+1})$$

d'après (9), ce qui montre que ni $A_{j,j}$ ni $A_{i,i+1}$ ne sont convexes dans $A_{j,j} \cup A_{i,i+1}$. D'après 1.9, $A_{j,j}$ non parallèle à $A_{i,i+1}$ entraîne $A_{j+1,j+1}$ non parallèle à $A_{i+1,i}$. Le raisonnement précédent montre que $A_{j+1,j+1}$ et $A_{i+1,i}$ ne sont pas convexes dans leur réunion.

d) Si les $A_{i,j}$ ne sont pas deux à deux parallèles, il existe $a_{00} \in A_{00}$ et, par exemple, $a_{10} \in A_{10}$ tels que $a_{00} \leqq a_{10}$. Nos hypothèses assurent l'existence d'un conserveur a'_{00} et d'un conserveur g dans le centre de D tels que $g \leqq a_{00} a'_{00}$. Mais alors $g \leqq a_{00} a'_{00} \leqq a_{00} a_{10} = b_{10} \in A_{10}$. D'après (7), $Z(g^2, gb_{10}, b_{10}^2, b_{10} g)$. Mais g étant central, ceci entraîne $gb_{10} = b_{10}^2 \in A_{10} \cap A_{00} \subseteq$ $\subseteq E_g = \varnothing$, ce qui est impossible.

Ceci achève la démonstration du théorème. Les hypothèses du corollaire suivant sont satisfaites si S est un m-demi-groupe de deuxième espèce sans zéro, en particulier si S est un m-groupe de deuxième espèce (cf. [3]).

2.2. COROLLAIRE. *Si* S *est un m-demi-groupe de deuxième espèce sans égaliseur, les ensembles* C *et* I *des conserveurs et inverseurs forment une partition en sous-ensembles parallèles ou comparables de* S; *on peut prolonger l'ordre de* S *de façon que* I *et* C *deviennent complètement comparables,* S *restant un m-demi-groupe.*

Démonstration. D'après le théorème, C et I sont parallèles ou comparables. En remplaçant l'ordre de S au besoin par l'ordre opposé nous pouvons supposer que $i < c$ pour tout couple d'éléments comparables $i \in I$, $c \in C$. Posons

$$\begin{aligned} x \ll y \quad & \text{si} \quad x \in I \quad \text{et} \quad y \in C \\ & \text{ou} \quad x, y \in I \quad \text{et} \quad x \leqq y \\ & \text{ou} \quad x, y \in C \quad \text{et} \quad x \leqq y . \end{aligned}$$

La relation $\ll$ est un ordre prolongeant l'ordre $\leqq$ sur S donné. Le demi-groupe D reste un m-demi-groupe par rapport à $\ll$: Pour tout $i \in I$, par exemple, $x \ll y$ entraine $ix \gg iy$; car si $x, y \in C$ ou $x, y \in I$, alors $x \leqq y$, d'où $ix \geqq iy$. Les éléments ix et iy étant tous les deux soit contenus dans C soit dans I, on en tire $ix \gg iy$. Si $x \in I$, $y \in C$, alors $ix \in C$ et $iy \in I$, d'où $ix \gg iy$.

2.3. COROLLAIRE. *Si* S *est un m-demi-groupe de troisième espèce o-connexe sans zéro,* S *n'a pas d'inverseur soit à gauche soit à droite.*

Ce corollaire est une conséquence de la partie b) du théorème compte tenu du fait qu'un m-demi-groupe o-connexe sans zéro n'a pas d'égaliseur d'après 1.3 et que dans un m-demi-groupe de troisième espèce l'un des ensembles A_{10} et A_{01} n'est pas vide par définition.

2.4. COROLLAIRE. *Soit* S *un m-demi-groupe de troisième espèce possédant un élément unité* 1 *tel que pour tout conserveur c il existe un conserveur c' tel que cc'* $\leqq 1$. *Si* S *ne possède pas d'égaliseur à gauche ou à droite, alors les ensembles* $I, C, I_g \cap C_d$ *et* $C_g \cap I_d$ *sont deux à deux parallèles.*

Ceci est une conséquence immédiate de la partie d) du théorème. Les hypothèses de ce corollaire sont satisfaites, si S est un m-groupe de troisième espèce (cf. [3]).

2.5. COROLLAIRE. *Soit* D *un demi-groupe qui est un ensemble totalement ordonné sans égaliseur. Alors on a*

soit $A_{10} = A_{01} = \varnothing$ *et* A_{00} *et* A_{11} *sont complètement comparables,*

soit $A_{11} = \varnothing$ *et* $A_{i,i+1} = \varnothing$ *pour* $i = 0$ *ou* $i = 1$.

Si D *ne possède pas d'égaliseur ni à droite ni à gauche,* $A_{10} = A_{01} = \varnothing$.

Ce corollaire est une conséquence des parties *a*) et *b*) du théorème et du lemme suivant:

2.6. LEMME. *Si un élément* $a_{10} \in A_{10}$ *est comparable à son carré*, $a_{10}^2 = a_{10}^3$, *et* a_{10}^2 *est un égaliseur à gauche. Si, de plus,* D *est o–connexe,* a_{10}^2 *est un zéro à gauche de* D.

Démonstration. Supposons que, par exemple, $a_{10} \leqq a_{10}^2$; en multipliant cette inégalité à gauche et à droite par a_{10} on obtient $a_{10}\, a_{10} \geqq a_{10}\, a_{10}^2$ et $a_{10}\, a_{10} \leqq a_{10}^2\, a_{10}$, d'où $a_{10}^2 = a_{10}^3$. Or, a_{10}^2 étant un conserveur et a_{10}^3 un inverseur à gauche, l'égalité montre que a_{10}^2 est un égaliseur à gauche. Si D est *o*–connexe, tout égaliseur à gauche idempotent est un zéro à gauche d'après la proposition 1.2. Par conséquent, a_{10}^2 est un zéro à gauche de D.

3. *m*–DEMI–GROUPES *o*–CONNEXES ET FILTRANTS.

Les résultats de la section 2 ne se généralisent pas aux *m*–demi–groupes ayant des égaliseurs. Nous avons un seul résultat intéressant dans cette direction. Avant de l'énoncer nous traitons la question de la convexité de l'ensemble des égaliseurs d'un côté dans un *m*–demi–groupe *o*–connexe. D'abord un lemme:

3.1. LEMME. *Soit* D *un demi–groupe muni d'une relation d'ordre,* D' *un sous–ensemble convexe de* D. *Soit* $B_d \subseteq S_d$ et $B_g \subseteq S_g$. *Alors les résiduels* $D' .\cdot B_d$ et $B_g \cdot . D'$ *sont convexes*.

Démonstration. Puisque $D' .\cdot B_d = \bigcap \{D' .\cdot b \,;\, b \in B_d\}$, et puisque une intersection d'ensembles convexes est convexe, il suffit de montrer que $D' .\cdot b$ est convexe pour tout $b \in S_d$. Or, si x et z sont dans $D' .\cdot b$, les éléments xb et zb sont contenus dans D'. Si y est entre x et z, yb est entre xb et zb. La convexité de D' entraîne $yb \in D'$, d'où $y \in D' .\cdot b$, ce qui est à démontrer.

Soit D un demi–groupe et un ensemble ordonné *o*–connexe tel que $D = S_d$. Notons K l'ensemble des zéros à gauche de D. D'après la proposition 1.2 nous avons

$$E_g = \{x \in D \,;\, xD = k \in K\} = \bigcup \{k .\cdot D \,;\, k \in K\}.$$

Puisque $D = S_d$, le lemme précédant entraîne que les ensembles $k .\cdot D$ sont convexes. Si K est réduit à un seul élément, E_g est donc convexe. Nous avons démontré:

3.2. PROPOSITION. *Dans un m–demi–groupe o–connexe* S, *possédant un zéro, les ensembles des égaliseurs à gauche, à droite et bilatères sont des idéaux convexes*.

Si D est *o*–connexe et possède des égaliseurs, nous n'avons pas de théorème analogue au théorème 2.1 à l'exception du cas particulier suivant. (Nous dirons qu'un conserveur ou un inverseur est propre, s'il n'est pas un égaliseur).

3.3 THÉORÈME. *Si dans un m-demi-groupe* S *de deuxième espèce et filtrant, l'ensemble* $C \setminus E$ *des conserveurs propres n'est pas vide, il est comparable à l'ensemble* $I \setminus E$ *des inverseurs propres. Les ensembles* I *et* C *sont convexes dans* S. *Si* S *n'a pas d'égaliseur non zéro, son ordre peut être prolongé de façon que* C *et* I *deviennent complètement comparables,* S *restant un m-demi-groupe.*

Démonstration. Montrons d'abord que C et I sont convexes. La démonstration étant semblable dans les deux cas, nous montrons seulement la convexité de I. Soient i, $i' \in I$ et $c \in C$ tels que $i < c < i'$. D'après 1.7, $i < c$ et $c < i'$ entraînent

$$(10) \qquad ic = c^2 = ci' = ii' = ci = i'c = i'i.$$

Soit $x > i'$; si $x \in C$, $c < i'$ et $i' < x$ entraînent $xc = i'c$ d'après 1.7, d'où $xc = c^2$ selon (10); si $x \in I$, $i < c$ et $c < x$ entraînent $xc = c^2$ d'après 1.7 également. De la même façon on montre que $yc = c^2$ pour tout élément $y < i$. Puisque S est filtrant, tout élément z de S est compris entre un majorant x de i' et un minorant y de i. Par conséquent $zc = c^2$ pour tout $z \in S$. De la même façon on trouve $cS = c^2$. Ainsi c est un égaliseur et à fortiori un inverseur. Tout élément d'un m-demi-groupe de deuxième espèce étant un conserveur ou un inverseur, nous avons montré la convexité de I.

Montrons deuxièmement que $C \setminus E$ et $I \setminus E$ ne sont pas parallèles. En effet, soit $c \in C \setminus E$ et $i \in I \setminus E$. S étant filtrant, c et i ont un majorant x et un minorant y commun. Si $C \setminus E$ et $I \setminus E$ étaient parallèles, x et y seraient nécessairement des égaliseurs. Ceci est impossible, puisque l'ensemble E des égaliseurs est convexe d'après 3.2.

Il reste à montrer que $C \setminus E$ et $I \setminus E$ sont comparables. Si ce n'est pas le cas, il existe c, $c' \in C \setminus E$ et i, $i' \in I \setminus E$ tels que $i < c$ et $c' < i'$.
Soit x un majorant commun de c et i'. Si x était un conserveur, $c' < i' < x$ entraînerait $i' \in C$, et si x était un inverseur, $i < c < x$ entraînerait $c \in I$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La dernière partie du théorème se démontre comme la partie analogue du corollaire 2.3.

4. m-DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNES AYANT PLUSIEURS ZEROS A DROITE.

Soit S un m-demi-groupe dont l'ordre est total et dont l'ensemble K des zéros à gauche possède au moins deux éléments. Tout élément de S est un conserveur à droite propre; car si k et m sont deux zéros à gauche tels que $k < m$, alors $kx = k < m = mx$ pour tout $x \in S$. Pour tout $k \in K$, l'ensemble

$$S_k = k \cdot\!\!\cdot\, k = \{y \in S \,;\, yk = k\}$$

est convexe d'après 3.1. C'est le plus grand sous-demi-groupe de S qui admet k comme zéro bilatère. Nous allons montrer que S est la réunion des S_k, et même un théorème plus précis.

Pour tout couple d'éléments h, $m \in K$ soit

$$S_{h,m} = S_h \cap S_m .$$

Les $S_{h,m}$ sont des sous–demi–groupes convexes de S ne rencontrant pas K. Pour tout $k \in K$, soit

$$T_k = \{ y \in S ; y^2 = k \} .$$

Pour tout k, T_k est contenu dans S_k et les T_k sont disjoints de tous les $S_{h,m}$.

4.1. LEMME. *Pour tout* $k \in K$, *l'ensemble* T_k *est un sous–demi–groupe convexe de* S.

Démonstration. Soit $x \in T_k$ et $y \in S$ tels que $k \leqq y \leqq x$. Alors $k = ky \leqq \leqq y^2 \leqq xy$, puisque tout élément de S est un conserveur à droite. Si x est un conserveur à gauche, $xy \leqq x^2 = k$; si x est un inverseur à gauche, $xy \leqq xk = k$. Par conséquent, $y^2 = k$, d'où $y \in T_k$. De même on montre que $x \in T_k$, $y \in S$ et $x \leqq y \leqq k$ entraînent $y \in T_k$. Par conséquent, T_k est une partie convexe de S.

Pour montrer que T_k est un sous–demi–groupe de S, prenons deux éléments x, y de T_k tels que $x \leqq y$. On en déduit que $xy \leqq y^2 = k$, d'où $(xy)^2 \leqq kxy = k$. Si xy n'est pas un élément de T_k, on a nécessairement $xy < xyx$; car T_k est convexe et contient xyx. Mais cette dernière inégalité entraîne $k = xy^2 \leqq (xy)^2$, ce qui est impossible. Par conséquent, $xy \in T_k$. De la même façon on montre que $yx \in T_k$.

Si K possède un plus grand élément k', posons

$$A = T_{k'} \cup \{ y \in S ; y \geqq k' \} .$$

Si K possède un plus petit élément k'', posons

$$B = T_{k''} \cup \{ y \in S ; y \leqq k'' \} .$$

Si K n'a pas de plus petit (resp. plus grand) élément, posons

$$B = \varnothing \text{ (resp. } A = \varnothing \text{)}.$$

4.2. LEMME. A *et* B *sont des sous–demi–groupes convexes de* S.

Démonstration. La convexité est une conséquence du lemme précédent. Les ensembles $\{ y \in S ; y \geqq k' \}$ et $\{ y \in S ; y \leqq k'' \}$ sont des idéaux à droite de S; car $y \geqq k'$ entraîne $yx \geqq k' x = k'$ et $y \leqq k''$ entraîne $yx \leqq k'' x = k''$ pour tout $x \in S$. Pour montrer que A et B sont des sous–demi–groupes de S, il suffit donc de montrer que $y \geqq k' \geqq x$ et $x^2 = k'$ entraînent $xy \in A$ et que $x \geqq k'' \geqq y$ et $x^2 = k''$ entraînent $xy \in B$. Nous omettons la vérification qui est facile.

Soit y un élément de S. Si y^2 est un zéro à gauche, $y \in T_{y^2}$, et y n'est pas contenu dans T_k si $k \neq y^2$. Supposons donc que y^2 n'est pas un zéro à gauche. D'après le lemme 2.6, y est un conserveur. Notons $H = \{ h \in K ; h \leqq y \}$ et $M = \{ m \in K ; y \leqq m \}$. Pour tout $h \in H$, $m \in M$ et tout $x \in S$ on a

$h = hx \leqq yx \leqq mx = m$, ce qu'on peut écrire sous la forme $H \leqq yS \leqq M$, si l'on convient d'écrire $X \leqq Y$; si $a \leqq b$ pour tout $a \in X$ et tout $b \in Y$. En particulier $H \leqq yK \leqq M$. De plus, $H < y < M$ entraîne $H \leqq yH \leqq y^2 \leqq yM \leqq M$.

Puisque $yK \subseteq K$ et puisque $y^2 \notin K$, ces inégalités entraînent:

a) Si $y > k$ pour tout $k \in K$, alors K possède un plus grand élément k' et $yK = k'$. En particulier, $yk' = k'$, c'est-à-dire que $y \in S_{k'}$.

b) Si $y < k$ pour tout $k \in K$, alors K possède un plus petit élément k'' et $y \in S_{k''}$.

c) Si $H \neq \varnothing \neq M$, alors H possède un plus grand élément h et M un plus petit élément m et on a $yH = h$ et $yM = m$, d'où $y \in S_h \cap S_m = S_{h,m}$; de plus, $yk = k$ pour un $k \in K$ entraîne $k = h$ ou $k = m$.

Ainsi nous voyons que tout élément y de S appartient à un et seulement un des sous-demi-groupes convexes A, B, T_k ($k \in K$, $k \neq \max K$ et $k \neq \min K$), $S_{h,m}$ (h, $m \in K$).

4.3. THÉORÈME. *Un m-demi-groupe* S, *dont l'ordre est total et dont l'ensemble* K *des zéros à gauche possède au moins deux éléments, admet une décomposition en sous-demi-groupes convexes contenant au plus un zéro à gauche de* S.

4.4. COROLLAIRE. *Si* S *satisfait les hypothèses du théorème et si* K *est o-dense dans* S (*c'est-à-dire que pour tout couple d'éléments* a, $b \in S$ *tels que* $a < b$ *il existe* $k \in K$ *tel que* $a < k < b$), *alors* $S = K$.

Enonçons sans démonstration qu'un m-demi-groupe de première espèce satisfaisant les hypothèses du théorème est entièrement déterminé par les sous-demi-groupes A, B, T_k et $S_{h,m}$.

5. EXTENSIONS DE CLIFFORD.

Dans cette section nous donnerons une construction de m-demi-groupes de deuxième espèce à partir de m-demi-groupes de première espèce. Il s'agit d'une généralisation d'un procédé de Clifford [2].

Commençons par une construction purement algébrique. Soit C un demi-groupe, $c \to \bar{c}$ un homomorphisme de C *sur* un demi-groupe I, et $i \to \bar{i}$ une application de I dans C tels que

(A) $c\,\bar{\bar{c'}} = \overline{\overline{cc'}} = \bar{\bar{c}}\,c'$ pour tout c, $c' \in C$.

Définissons une loi de composition $*$ sur la réunion disjointe S de C et I par

$$(M)\begin{cases} c * c' = cc' \\ c * i = \bar{c}i' \\ i * c = i\bar{c} \\ i * i' = \overline{ii'} \end{cases} \quad \text{pour tout } c, c' \in C \text{ et tout } i, i' \in I.$$

On vérifie facilement que cette loi est associative. La seule vérification non triviale est la suivante: Soient $i, j, k \in \mathrm{I}$. Alors

$$i * (j * k) = i * \overline{jk} = i\,\overline{\overline{jk}} \quad , \quad (i * j) * k = \overline{ij} * k = \overline{\overline{ij}}\,k.$$

Or, (A) entraîne $\bar{c}\,\bar{\bar{\bar{c}}}{}' = \overline{\overline{\overline{cc'}}} = \bar{\bar{\bar{c}}}\,\bar{c}'$ pour tout $c, c' \in \mathrm{C}$. L'application $c \to \bar{c}$ étant surjective, on en tire:

$$(\mathrm{A}') \quad i\,\overline{\overline{i'}} = \overline{\overline{ii'}} = \bar{\bar{i}}\,i' \text{ pour tout } i, i' \in \mathrm{I}.$$

Ceci montre l'égalité de $i * (j * k)$ et $(i * j) * k$.

Si C possède un zéro o, alors $\bar{o}$ est un zéro de I et $\{o, \bar{o}\}$ est un idéal de S. Par conséquent, $S_0 = S/\{o, \bar{o}\}$ est un demi-groupe avec un zéro. Nous dirons que S et S_0 sont des *extensions centrales* de C.

Notons que dans S, $\mathrm{C} * \mathrm{C} \cup \mathrm{I} * \mathrm{I} \subseteq \mathrm{C}$ et $\mathrm{I} * \mathrm{C} \cup \mathrm{C} * \mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}$.

Supposons que C possède une unité 1. La condition (A) entraîne $\bar{\bar{c}}\,1 = \overline{\overline{c1}} = \bar{\bar{c}} = \overline{\overline{1c}} = \bar{\bar{1}}\,c$ pour tout $c \in \mathrm{C}$. Par conséquent, la condition (A) signifie que $c \to \bar{\bar{c}}$ est une translation de C par un élément central $\bar{\bar{1}}$. De plus, (A') entraîne pour tout $i \in \mathrm{I}$,

$$c * \bar{1} = i\,\bar{1} = i = \bar{1}\,i = \bar{1} * c,$$

où c est un élément de C tel que $\bar{c} = i$. Par conséquent, $g = \bar{1}$ commute avec tout élément de C et $\mathrm{I} = \mathrm{C} * \bar{1}$. Réciproquement, nous avons:

5.1. LEMME. *Soit* T *un demi-groupe réunion de deux sous-ensembles* C *et* I *satisfaisant*

a) $\mathrm{C} \cap \mathrm{I}$ *est vide ou réduit à un seul élément* z,

b) $\mathrm{CC} \cup \mathrm{II} \subseteq \mathrm{C}$ et $\mathrm{IC} \cup \mathrm{CI} \subseteq \mathrm{I}$,

c) *il existe un élément* g *dans le centre de* T *tel que* $\mathrm{I} = \mathrm{C}g$. *Alors* T *est une extension centrale de* C.

Démonstration. Définissons une application $c \to \bar{c} = cg$ de C sur I. Par la loi $\bar{c} \circ \bar{c}' = \overline{cc'}$ l'ensemble I devient un demi-groupe tel que $c \to \bar{c}$ est un homomorphisme. Pour tout $i \in \mathrm{I}$ posons $\bar{i} = gi$. Alors la condition (A) est satisfaite, et l'on peut construire l'extension centrale S. Si $\mathrm{C} \cap \mathrm{I} = \varnothing$, on voit que S et T sont isomorphes. Si $\mathrm{C} \cap \mathrm{I} = \{z\}$, la condition *b*) montre que z est un zéro de T, et en particulier de C. On peut former $S_0 = S/\{z, \bar{z}\}$, et on voit que T est isomorphe à S_0.

Si C et I sont des m-demi-groupes de première espèce et si les applications $c \to \bar{c}$ de C sur I et $i \to \bar{i}$ de I dans C sont anti-isotones et satisfont (A), l'extension centrale S est un m-demi-groupe de deuxième espèce ayant C et I comme ensemble des conserveurs et inverseurs respectivement, si l'on définit un ordre sur S qui prolonge les ordres sur C et I par

$$(0) \qquad i < c \text{ pour tout } i \in \mathrm{I} \text{ et tout } c \in \mathrm{C}.$$

(Vérifier que S est en effet un m-demi-groupe est un calcul sans difficulté). Si C possède un zéro o et si o est le plus petit élément de C, alors $\bar{o}$ est le plus grand élément de I. Si l'on ordonne $S_0 = S/\{o, \bar{o}\}$ de manière évidente, il devient un *m*-demi-groupe de deuxième espèce avec des égaliseurs. Nous dirons que les *m*-demi-groupes S et S_0 ainsi construits sont des *extensions de* Clifford de C.

5.2. THÉORÈME. *Un m-demi-groupe* T *de deuxième espèce tel que*

1) *L'ensemble* C *des conserveurs est complètement comparable à l'ensemble* I *des inverseurs.*

2) *il existe un inverseur g dans le centre de* T *tel que* $I = Cg$, *est une extension de Clifford de* C.

Démonstration. Un *m*-demi-groupe de deuxième espèce est la réunion de l'ensemble C des conserveurs et de l'ensemble I des inverseurs, et C et I satisfont la condition *b*) du lemme précédent.

La condition *a*) du lemme est satisfaite, puisque C et I sont supposés complètement comparables. La condition *c*) du lemme et la condition 2) étant équivalentes, le lemme 5.1 nous dit que T est une extension centrale de C. Puisque *g* est un inverseur, les applications $c \to \bar{c} = cg$ et $i \to \bar{i} = ig$ sont anti-isotones. Les ensembles C et I étant supposés complètement comparables, on vérifie facilement que T est une extension de Clifford de C.

On peut donner une méthode pour construire une classe de *m*-demi-groupes de deuxième espèce plus grande que la classe des extensions de Clifford de façon que tout *m*-demi-groupe de deuxième espèce satisfaisant la condition 1) du théorème et

2′) il existe un $g \in I$ tel que $I = gC = Cg$,

est un membre de cette classe. Mais il faut remplacer la condition (A) par une condition beaucoup plus complexe.

REFERENCES.

[1] J. F. ANDRUS et A. T. BURTON, *Ordered groups*, « Amer. Math. Monthly », 70, 619–628 (1963).

[2] A. H. CLIFFORD, *Ordered commutative semigroups of the second kind*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 9, 682–687 (1958).

[3] A. H. CLIFFORD, *Partially ordered groups of the second and third kind*, « Proc. Amer. Math. Soc. », 17, 219–225 (1966).

[4] J. GILDER, *Betweenness and order in semigroups*, « Proc. Camb. Phil. Soc. », 61, 13–28 (1965).

[5] K. KEIMEL, *Halbgruppen mit Zwischenbedingung*, « Staatsexamensarbeit », Tübingen 1964.

[6] P. G. KONTOROVIC et A. I. KOKORIN, *A type of partially ordered groups* (en russe), « Ural. Gos. Univ. Mat. Zap. 3 », tetrad 3, 39–44 (1962).

[7] J. A. H. SHEPPERD, *Betweenness groups*, « J. London Math. Soc. », 61, 277–285 (1957).