
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUCIANO CHIARA

**Contributi al problema dei due corpi di massa
variabile**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.6, p. 497–501.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_497_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica celeste. — *Contributi al problema dei due corpi di massa variabile* (*). Nota di LUCIANO CHIARA, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — Continuing the investigations concerning the problem of two bodies of variable masses, the Author gives a new form of the equation of the variation of eccentricity suitable for revealing other cases of integration.

A case particularly notable for application purposes is pointed out.

Furthermore a deduction included in a preceding Paper is specified in an essential point.

1. — Con riferimento al problema dei due corpi di massa decrescente — ad orbita osculatrice ellittica — e con le stesse notazioni ed unità usate in una mia ricerca analoga inserita in questi « Rendiconti » (1), assumo come equazioni di avvio la (5) e la (9) della Nota citata; equazioni che riporto sotto forma lievemente diversa

$$(1) \quad \dot{e} = \sigma m r^{-1} \cos E$$

$$(2) \quad r m^{-1} (1 - e^2)^{-1/2} \dot{E} = 1 - \sigma e^{-1} (1 - e^2)^{-3/2} \sin E,$$

avendo indicato con σ la quantità puramente numerica — $c^3 f^{-2} \dot{m}/m^3$ che, nelle nostre unità, si identifica col rapporto — $\dot{m}/m^3$.

Questo parametro, da noi frequentemente introdotto in questo genere di indagini, è assai comodo sia perché la sua legge di variazione può assumersi quale « legge di emissione » del sistema binario, sia perché, nei problemi concreti riguardanti i sistemi binari celesti, esso è sempre estremamente piccolo rispetto ad uno e varia lentissimamente col tempo; tanto per dare una indicazione numerica supporremo

$$(3) \quad 0 < \sigma < \sigma^* \leq 10^{-7}, \quad |\dot{\sigma}| < \sigma.$$

Dalla (2) si deduce che, per

$$(4) \quad \sigma < e (1 - e^2)^{3/2},$$

la $\dot{E}$ è positiva e finita e quindi la $E(t)$ è invertibile ed ogni funzione monotona di t è funzione equimonotona di E e viceversa. In accordo con la (3) penseremo

$$(5) \quad 10^{-6} \leq e \leq 1 - 10^{-4}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 36 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno accademico 1967-68.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1967.

(1) Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente. Nota I, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Aprile 1959, fasc. 4.

Notiamo per il seguito che, se da un istante t in poi la m restasse costante, dalla (2) si avrebbe per $\dot{E}$

$$(6) \quad \dot{E}^* = mr^{-1} (1 - e^2)^{1/2}.$$

2. - Dal prodotto in croce delle (1) e (2) si ottiene la relazione

$$\dot{e} - \sigma \dot{e} e^{-1} (1 - e^2)^{-3/2} \sin E = \sigma (1 - e^2)^{-1/2} \dot{E} \cos E$$

da cui si ricava

$$e \dot{e} = \sigma \{ \dot{e} (1 - e^2)^{-3/2} \sin E + e (1 - e^2)^{-1/2} \dot{E} \cos E \}.$$

Quest'ultima, notando che si ha identicamente

$$\dot{e} (1 - e^2)^{-3/2} \sin E + e (1 - e^2)^{-1/2} \dot{E} \cos E = \{ e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E \}',$$

può scriversi

$$(7) \quad e \dot{e} = \sigma \{ e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E \}'.$$

Passiamo a dimostrare che

$$e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E = r \dot{r}.$$

Invero in ogni istante t il moto effettivo (del secondario P intorno al primario) ed il corrispondente moto kepleriano osculatore sono in P *moti tangenti*, sicché, con ovvio significato dei simboli, si avrà

$$P \equiv P_e \equiv P_k, \quad \vec{V}(P_e) \equiv \vec{V}(P_k)$$

e quindi $\dot{r}_e = \dot{r}_k$, cioè nell'istante (generico) t la $\dot{r}$ calcolata per m variabile è uguale alla $\dot{r}$ valutata per m costante da t in poi.

Ma allora, dalla ben nota espressione di r

$$r = a (1 - e \cos E), \quad \text{con } a = m^{-1} (1 - e^2)^{-1}$$

e ricordando l'osservazione che ci ha condotto alla (6), si ricava

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a e \sin E \dot{E}^* \\ &= r^{-1} m (1 - e^2)^{1/2} a e \sin E \\ &= r^{-1} e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E \end{aligned}$$

epperò

$$r \dot{r} = e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E, \quad \text{c.v.d.}$$

Tenuto conto di questa, la (7) si scrive

$$(8) \quad e \dot{e} = \sigma (r \dot{r})'$$

o anche

$$(9) \quad (e^2)^* = \sigma (r^2)^*.$$

Da questa si deduce inoltre successivamente.

$$\begin{aligned} (e^2)^* &= \sigma (r^2)^* - \dot{\sigma} (r^2)^* \\ &= \sigma (r^2)^* - (\dot{\sigma} r^2)^* + \ddot{\sigma} r^2 \end{aligned}$$

ed infine

$$(10) \quad \left(e^2 - 2\sigma \frac{e \sin E}{1 - e^2} + \dot{\sigma} r^2 \right)^* = \ddot{\sigma} r^2;$$

quest'ultima nuova forma dell'equazione della variazione dell'eccentricità mette in luce nuovi casi notevoli d'integrazione.

3. - Ci limitiamo qui ad indicarne uno particolarmente semplice: quello in cui σ sia una funzione lineare di t e ϑ , corrispondente perciò ad una legge di emissione del tipo

$$(11) \quad -\dot{m} = (\alpha + \beta t + \gamma \vartheta) m^3.$$

In tale ipotesi sarà $\dot{\sigma} = \beta + \gamma \dot{\vartheta} = \beta + \gamma/r^2$, epperò

$$\ddot{\sigma} r^2 = -2 \gamma \dot{r}/r = -(2 \gamma \log r)^*,$$

sicché alla (10) può darsi la forma

$$\{ e^2 - 2\sigma e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E + \beta r^2 + 2 \gamma \log r \}^* = 0$$

da cui, integrando, si ricava

$$(12) \quad e^2 - 2\sigma e (1 - e^2)^{-1/2} \sin E + \beta r^2 + 2 \gamma \log r = \text{costante}.$$

Il caso segnalato ci sembra notevole ai fini applicativi perché, come è noto, i maggiori autori (Jeans, Eddington, Fesenkov, etc.) che si sono occupati della questione, propendono per una legge di emissione che sia, o addirittura

$$(13) \quad -\dot{m}/m^3 = \sigma = \text{costante} = \alpha, \quad (\alpha > 0)$$

o si « discosti poco » da essa.

Ebbene, una maniera di realizzare la seconda alternativa è quella di pensare nella (13) la σ lentissimamente variabile dando alla legge di emissione la forma generica (11), o, più semplicemente, la forma (11) con $\gamma = 0$. L'equazione (12) dà allora in termini finiti, la legge di variazione della eccentricità nei sistemi binari nell'ipotesi che l'emissione (radiativa e corpuscolare) avvenga secondo la legge così generalizzata di Jeans-Eddington-Fesenkov.

Con riferimento ai sistemi binari celesti e considerato un lasso di tempo T - dell'ordine di grandezza dell'età massima di quei sistemi - entro cui la

massa della doppia si riduca magari ad $1/20$ di quella iniziale si scorge dalla (12) che la variazione dell'eccentricità (entro quel lasso di tempo) è enormemente piccola.

Non indugeremo qui in un'analisi minuziosa della (12), preferendo invece riesaminare - nell'ambito di validità della (4) - il caso più interessante

$$\sigma = \text{funzione monotona di } t$$

nell'intervallo $t_0, t_0 + T$, essendo t_0 un istante prossimo al primo stadio di vita della doppia. Ritorniamo su questo caso - da noi studiato in altra precedente ricerca ⁽²⁾, inserita in questi « Rendiconti » - allo scopo di rimuovere una svista in cui siamo ivi incorsi.

4. - Dalla (1) si deduce che la e in ogni periodo (iniziato per comodità, dal punto di anomalia eccentrica $-\pi/2$) ha un minimo per $E = -\pi/2$, cresce per E crescente da $-\pi/2$ a $\pi/2$ dove raggiunge il massimo e poi decresce sino alla fine del periodo ($E = -3\pi/2$) in cui sarà di nuovo minima, e così via. Tenuto conto della (1), si vede inoltre dalla (7) che $\{e(1-e^2)^{-1/2} \sin E\}'$ è concorde con $\dot{e}$, pertanto sarà positiva tra $-\pi/2$ e $\pi/2$, negativa tra $\pi/2$ e $3\pi/2$.

Supponiamo ora che σ sia una funzione non crescente di t (epperò di E) e, con riferimento ad un periodo, siano $t_1, \bar{t}_1, t_2$ gli istanti in cui la E assume ordinatamente i valori $-\pi/2, \pi/2$, e $3\pi/2$. Integrando la (7) in quel periodo si ottiene

$$(14) \quad e_2^2 - e_1^2 = 2 \int_{t_1}^{\bar{t}_1} \sigma \{e(1-e^2)^{-1/2} \sin E\}' dt + 2 \int_{\bar{t}_1}^{t_2} \sigma \{e(1-e^2)^{-1/2} \sin E\}' dt.$$

Internamente al primo intervallo la $\{e(1-e^2)^{-1/2} \sin E\}'$, come si è già notato, è positiva, nel secondo è negativa. Sarà allora

$$(15) \quad e_2^2 - e_1^2 = 2\lambda \left\{ \frac{\bar{e}_1}{\sqrt{1-e_1^2}} + \frac{e_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \right\} - 2\mu \left\{ \frac{e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} + \frac{\bar{e}_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \right\},$$

essendo λ e μ due convenienti valori medi di σ nei rispettivi intervalli, epperò

$$\sigma_1 \geq \lambda \geq \bar{\sigma}_1 \geq \mu \geq \sigma_2 > 0.$$

Posto $\lambda = \mu + \alpha$ ($\alpha \geq 0$), la (15) diventa

$$(16) \quad (e_2 + e_1)(e_2 - e_1) = -2\mu \left\{ \frac{e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} - \frac{e_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \right\} + 2\alpha \left\{ \frac{\bar{e}_1}{\sqrt{1-e_1^2}} - \frac{e_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \right\}.$$

Osservando che delle due quantità in parentesi a graffe, la prima è concorde con $e_2 - e_1$ e la seconda è positiva, scriveremo

$$(17) \quad (e_2 + e_1)(e_2 - e_1) = -2\mu(e_2 - e_1)h^2 + 2\alpha k^2$$

(2) Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente. Nota III, « Rend. Acc. Naz. Lincei », fasc. 1-2, luglio 1961.

e quindi

$$(e_1 + e_2 + 2 \mu h^2)(e_2 - e_1) = 2 \alpha k^2.$$

Ne discende

$$(18) \quad e_2 - e_1 \geq 0,$$

l'alternativa = valendo per $\sigma = \text{costante}$ ($\alpha = 0$) in $t_1 < t < t_2$.

Spostando in avanti di π l'origine del periodo, l'integrazione analoga alla (14) ci porta alla ineguaglianza

$$(19) \quad \bar{e}_2 - \bar{e}_1 \leq 0;$$

ripetendo poi il procedimento per σ non decrescente si perviene nei due casi a

$$(20) \quad e_2 - e_1 \leq 0 \quad , \quad \bar{e}_2 - \bar{e}_1 \geq 0.$$

Vengono così ritrovate le ineguaglianze fondamentali (18), (19) e (20) contenute nella mia precedente ricerca, sicché valgono, con tutto rigore, le conclusioni cui siamo pervenuti nei numeri 2 e 3 della Nota citata.

In particolare: se σ è una funzione monotona di t (in $t_0, t_0 + T$), la variazione totale Δe dell'eccentricità in qualunque lasso di tempo (contenuto in $t_0, t_0 + T$) non supera, in valore assoluto, l'oscillazione Ωe della e relativa ad un solo semiperiodo (il primo quando σ è non crescente, l'ultimo quando σ è non decrescente).

Eseguendo l'integrazione della (7) relativa a siffatto semiperiodo – ed indicando con e_1 ed e_2 rispettivamente il minimo ed il massimo valore della e – si ottiene

$$(e_1 + e_2) \Omega e = 2 \lambda \left\{ \frac{e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} + \frac{e_1}{\sqrt{1-e_1^2}} \right\} < 2 \lambda \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{1-e_2^2}}$$

epperò

$$(21) \quad |\Delta e| \leq \Omega e < \frac{2 \sigma^*}{\sqrt{1-e_2^2}}$$

o, se si vuole, a meno di quantità del tutto trascurabile,

$$|\Delta e| < \frac{2 \sigma^*}{\sqrt{1-e^2}},$$

con e indicando il valore dell'eccentricità in un istante qualsiasi del lasso di tempo considerato.