
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

JACQUES LUIS LIONS, ENRICO MAGENES

**Quelques remarques sur les problèmes aux limites
linéaires elliptiques et paraboliques dans des classes
d'ultra-distributions. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.6, p. 469–476.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_469_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Quelques remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques et paraboliques dans des classes d'ultra-distributions.* Nota II di JACQUES LUIS LIONS e ENRICO MAGENES, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Continuando lo studio svolto nella Nota I per le equazioni ellittiche, si considerano i problemi ai limiti, in classi di ultradistribuzioni, per le equazioni paraboliche.

EQUATIONS PARABOLIQUES.

5. Rappelons et complétons les définitions des espaces de fonctions et de distributions de Gevrey à valeurs vectorielles que nous avons utilisées dans [15] (9) pour les problèmes aux limites paraboliques.

Soit donc F un espace vectoriel topologique, localement convexe, séparé. On désigne par $\mathfrak{D}(\mathbf{R}; F)$ (resp. $\mathfrak{S}(\mathbf{R}; F)$, resp. $\mathfrak{D}_+(\mathbf{R}; F)$, resp. $\mathfrak{D}_-(\mathbf{R}; F)$) l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur la droite $\mathbf{R}$, à valeurs dans F ; à support compact (resp. à support quelconque, resp. à support limité à gauche, resp. à droite), ces espaces étant munis des topologies de L. Schwartz [22].

Espace $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F)$.

On définit algébriquement l'espace $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F)$, s réel > 1 , comme l'espace des fonctions $t \rightarrow \varphi(t)$ définis dans $\mathbf{R}$ et à valeurs dans F , telles que

$$(14) \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}; F)$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un nombre } L \text{ et un borné } \mathfrak{B} \text{ de } F \text{ (dépendant de } \varphi) \\ \text{tels que } \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k (k!)^s} \in \mathfrak{B}, \quad k = 0, 1, \dots; t \in \mathbf{R}. \end{array} \right.$$

On définit la topologie sur $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F)$ de la façon suivante. Soit $\{L_i\}$ une suite croissante de nombres positifs tendant vers $+\infty$. On désigne par $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\mathbf{R}; F)$ le sous espace de $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F)$ des φ à support dans $[-i, i]$ et tels que (15) ait lieu avec $L = L_i$ fixé. Et sur $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\mathbf{R}; F)$ on introduit la topologie définie par le système fondamental de voisinages de zéro:

$$\mathfrak{V} = \left\{ \varphi \left| \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L_i^k (k!)^s} \in \mathfrak{V}_F, \quad k = 0, 1, \dots; t \in [-i, i] \right. \right\}$$

où l'on fait parcourir à $\mathfrak{V}_F$ un système fondamental de voisinages de zéro dans F .

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) Pour la bibliographie cf. la note précédente en ces « Rendiconti », vol. XLIII, fasc. 5, p. 293.

Alors on a

$$\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F) = \bigcup_i \mathfrak{D}_s^{(i)}(\mathbf{R}; F)$$

et on munit $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F)$ de la topologie de limite inductive des $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\mathbf{R}; F)$. On voit facilement qu'elle ne dépend pas de la suite $\{L_i\}$ choisie.

Espaces $\mathfrak{D}_{\pm, s}(\mathbf{R}; F)$.

Algébriquement l'espace $\mathfrak{D}_{+, s}(\mathbf{R}; F)$, s réel > 1 , est l'espace des fonctions $t \rightarrow \varphi(t)$ définies dans $\mathbf{R}$ et à valeurs dans F telles que

$$(16) \quad \varphi \in \mathfrak{D}_+(\mathbf{R}; F)$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque } b \text{ il existe un nombre } L \text{ et un borné } \mathfrak{B} \text{ de } F \text{ (dé-} \\ \text{pendant de } \varphi \text{ et de } b), \text{ tels que } \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k (k!)^s} \in \mathfrak{B}, \quad k = 0, 1, \dots, \text{ et } t \leq b. \end{array} \right.$$

Introduisons dans $\mathfrak{D}_{+, s}(\mathbf{R}; F)$ la topologie de la façon suivante (la présentation est un peu différente que dans [15], mais les deux topologies coïncident). On considère pour chaque intervalle $[a, b]$ fixé et chaque $L > 0$ fixé l'espace

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}_{a, s}([a, b], L; F) = \left\{ \varphi \mid t \rightarrow \varphi(t) \text{ est définie et indéfiniment dif-} \right. \\ \text{férentiable dans } [a, b] \text{ à valeurs dans } F; \varphi^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots; \\ \left. \text{il existe un borné } \mathfrak{B} \text{ de } F \text{ tel que } \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k (k!)^s} \in \mathfrak{B}, \quad \forall k \text{ et } t \in [a, b] \right\}. \end{array} \right.$$

On introduit dans $\mathfrak{D}_{a, s}([a, b], L; F)$ une topologie en définissant un système fondamental de voisinages de zéro par

$$\mathfrak{V} = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{D}_{a, s}([a, b], L; F), \quad \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k (k!)^s} \in \mathfrak{V}_F, \quad \forall k \text{ et } t \in [a, b] \right\}$$

où l'on fait parcourir à $\mathfrak{V}_F$ un système fondamental de voisinages de zéro dans F .

On définit ensuite l'espace

$$(19) \quad \mathfrak{D}_{a, s}([a, b]; F) = \bigcup_i \mathfrak{D}_{a, s}([a, b], L_i; F)$$

où $\{L_i\}$ est une suite quelconque croissante tendant vers $+\infty$, avec la topologie de *limite inductive* (elle ne dépend pas de la suite $\{L_i\}$).

Soit ensuite $\{b_i\}$ une suite croissante tendant vers $+\infty$; on voit aisément que les espaces $\mathfrak{D}_{a, s}([a, b_i]; F)$, où l'on suppose $a < b_i$, donnent lieu à un *spectre projectif* (cfr. par exemple [24]) par rapport aux applications

$\rho_{i,j}$ ($i < j$) définies comme les restrictions des φ définies dans $[a, b_j]$ à l'intervalle $[a, b_i]$. On définit alors l'espace

$$(20) \quad \mathfrak{D}_{a,s}([a, +\infty]; F) = \lim_{b_i \rightarrow +\infty} \text{projective } \mathfrak{D}_{a,s}([a, b_i]; F).$$

On voit aisément qu'il ne dépend pas de la suite $\{b_i\}$.

Enfin soit $\{a_i\}$ une suite décroissante tendant vers $-\infty$; il est évident que $\mathfrak{D}_{a_i,s}([a_i, +\infty]; F)$ est un *spectre inductif* (au sens par exemple de [24]) par rapport aux applications $\rho_{i,j}$ ($i < j$) définies comme prolongements par zéro dans $[a_i, a_j]$ des fonctions définies dans $[a_j, +\infty]$. On définit alors l'espace

$$(21) \quad \mathfrak{D}_{+,s}(\mathbf{R}; F) = \lim_{a_i \rightarrow -\infty} \text{inductive } \mathfrak{D}_{a_i,s}([a_i, +\infty]; F)$$

et on voit aisément qu'il ne dépend pas de la suite $\{a_i\}$ choisie et qu'il coïncide algébriquement avec l'espace des φ satisfaisant à (16) (17).

On définit de façon analogue (on échange le rôle de a et b , etc.) l'espace

$$\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; F)$$

des fonctions à support limité à droite.

Espace $\mathfrak{E}_s(\mathbf{R}; F)$.

Algébriquement l'espace $\mathfrak{E}_s(\mathbf{R}; F)$, s réel > 1 , est l'espace des fonctions $t \rightarrow \varphi(t)$ définies dans $\mathbf{R}$ et à valeurs dans F , indéfiniment différentiables, telles que

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque intervalle } [a, b] \text{ il existe un nombre } L \text{ et un borné} \\ \mathfrak{B} \text{ de } F \text{ tels que } \frac{\varphi^{(k)}(t)}{L^k (k!)^s} \in \mathfrak{B}, \quad k = 0, 1, \dots, \text{ et } t \in [a, b]. \end{array} \right.$$

De façon évidente on peut introduire la topologie sur $\mathfrak{E}_s(\mathbf{R}; F)$ en suivant la méthode utilisée ici pour $\mathfrak{D}_{\pm,s}(\mathbf{R}; F)$ ou en suivant [15].

Remarque 3. — On peut généraliser les espaces précédents en utilisant des suites $\{M_k\}$ convenables au lieu de la suite $\{M_k = (k!)^s\}$, cfr. [15].

6. Supposons maintenant en outre que F soit réflexif et notons F' son dual fort. Par définition l'espace $\mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; F)$ des distributions de Gevrey d'ordre s à valeurs dans F est l'espace dual de l'espace $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F')$, i.e.

$$(23) \quad \mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; F) = (\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F'))'.$$

On munira cet espace de la topologie forte de dual, sauf dans des cas exceptionnels explicitement notés.

De la même façon on pose par définition

$$(24) \quad \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; F) = (\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; F'))' \quad (\text{resp. } \mathfrak{D}'_{-,s}(\mathbf{R}; F) = (\mathfrak{D}_{+,s}(\mathbf{R}; F'))')$$

avec la topologie forte de dual, *sauf mention expresse de contraire*; et on démontre que $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; F)$ (resp. $\mathfrak{D}'_{-,s}(\mathbf{R}; F)$) coïncide avec le sous-espace de $\mathfrak{D}'(\mathbf{R}; F)$ des distributions à support limité à gauche (resp. à droite).

La dérivation et la multiplication par des fonctions (scalaires) de $\mathfrak{E}_r(\mathbf{R}; \mathbf{C}) (= \mathfrak{E}_r(\mathbf{R}))$, $1 < r < s$, se définissent dans $\mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; F)$ comme pour les distributions ordinaires.

Remarque 4. - A vrai dire les définitions données par (23) et (24) des distributions de Gevrey à valeurs dans F n'est pas la plus générale possible; par analogie avec les distributions ordinaires [23] on pourrait appeler « espace des distributions de Gevrey à valeurs dans F » l'espace $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; F))$ des applications linéaires continues de $\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}) (= \mathfrak{D}_s(\mathbf{R}; \mathbf{C}))$ dans F , au lieu d'utiliser (23); mais dans les applications que nous avons en vue c'est la définition (23) qui est la plus commode. En tout cas on a

$$\mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; F) \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_s(\mathbf{R}); F)$$

Remarque 5. - Dans la suite nous utiliserons pour F les espaces $\mathfrak{D}(\Omega)$, $\mathfrak{D}'(\Omega)$, $\mathfrak{D}_r(\Omega)$, $\mathfrak{D}'_r(\Omega)$ (avec $r > 1$); signalons alors que l'on a les relations d'inclusions suivantes; où r et s sont des réels > 1 :

$$(25) \quad \mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}_r(\Omega)) \subset \mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega)) \subset \mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega))$$

chaque espace étant dense et continuellement plongé dans les suivants; on en déduit alors, grâce à (24),

$$(26) \quad (\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega)))' \subset \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \subset \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega)).$$

Définissons

$$(27) \quad \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) = (\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega)))'.$$

Alors (26) devient

$$(28) \quad \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \subset \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \subset \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega)) \quad s \text{ et } r > 1.$$

Notons que la définition (27) diffère de celle de L. Schwartz [23]; notre définition est plus restrictive: on a

$$(29) \quad \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}); \mathfrak{D}'(\Omega)).$$

Nous renvoyons aussi pour une question analogue à la Remarque 4. Rappelons aussi que

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}); \mathfrak{D}'(\Omega)) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$$

où Q est le cylindre $Q = \Omega \times \mathbf{R}_t^1$ et $\mathfrak{D}'(Q)$ est l'espace des distributions (scalaire) sur Q ; et donc

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \text{ s'identifie à un sous-espace de distributions} \\ \text{(scalaires) sur } Q. \end{array} \right.$$

7. On considère maintenant dans $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_t^1$ le cylindre

$$Q = \Omega \times \mathbf{R}_t^1$$

Ω vérifiant les hypothèses du n. 1; et on désigne par

$$\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}_t^1$$

la frontière de Q . Dans Q on considère l'opérateur

$$(31) \quad P = A(x, t; D_x) + \frac{\partial}{\partial t}$$

où A est donné par

$$(32) \quad Au = \sum_{|\mathfrak{p}|, |\mathfrak{q}| \leq m} (-1)^{|\mathfrak{p}|} D_x^{\mathfrak{p}} (a_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}(x, t) D_x^{\mathfrak{q}} u)$$

D_x désignant la dérivation par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$. On suppose que les coefficients $a_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}}$ vérifient

$$(33) \quad a_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} \in \mathcal{E}_{2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}(\bar{\Omega}))$$

où $\mathcal{H}(\bar{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions analytiques dans $\bar{\Omega}$. On se donne aussi un système d'opérateurs « frontière »

$$(34) \quad B_j u = B_j(x, t; D_x) u = \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh}(x, t) D_x^h u \quad j = 0, \dots, m-1$$

d'ordre m_j , avec $0 \leq m_j < 2m$, à coefficients b_{jh} appartenant à $\mathcal{E}_{2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}(\Gamma))$. Et on suppose que:

$$(35) \quad \text{pour chaque } t_0 \text{ le système } \{B_j(x, t_0; D_x)\}_{j=0}^{m-1} \text{ est normal sur } \Gamma;$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et chaque } t_0 \text{ l'opérateur } A(x, t_0; D_x) + \\ + (-1)^m e^{i\theta} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \text{ est PROPREMENT ELLIPTIQUE dans } \Omega \times \mathbf{R}_y^1 \text{ et le} \\ \text{système d'opérateurs « frontière » } \{B_j(x, t_0; D_x)\}_{j=0}^{m-1} \text{ recouvre l'opé-} \\ \text{rateur } A(x, t_0; D_x) + (-1)^m e^{i\theta} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \text{ sur } \Gamma \times \mathbf{R}_y^1 \end{array} \right.$$

On a alors la formule de Green

$$\int_Q Pu \bar{v} dx dt - \int_Q u \overline{P^* v} dx dt = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Sigma} S_j u \overline{C_j v} d\sigma dt - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Sigma} B_j u \overline{T_j v} d\sigma dt$$

$$\forall u, v \in \mathfrak{D}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\bar{\Omega})),$$

où P^* est l'adjoint formel de P et $\{S_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{C_j\}_{j=0}^{m-1}$, $\{T_j\}_{j=0}^{m-1}$ sont des systèmes, déterminés de façon analogue aux opérateurs $\{S_j\}$, $\{C_j\}$ et $\{T_j\}$ de la formule de Green (3).

8. Nous considérons le *problème aux limites parabolique*

$$(38) \quad Pu = f \quad \text{dans } Q$$

$$(39) \quad B_j u = g_j \quad \text{sur } \Sigma, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

$$(40) \quad f, g_j \text{ étant à support en } t \text{ limité à gauche,}$$

et nous chercherons la solution u dans les espaces $\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$ et $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega))$, $s \geq 2m$ et $r > 1$ ⁽¹⁰⁾. Pour cela on va introduire les espaces:

$$(41) \quad Y = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \text{ , } Pu \in \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; K'(\Omega))\} \quad (11)$$

$$(42) \quad Y_s = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega)) \text{ , } Pu \in \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'(\Omega))\}$$

$$(43) \quad Y_{s,r} = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega)) \text{ , } Pu \in \mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'_r(\Omega))\}$$

munis de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \rightarrow u$ et $u \rightarrow Pu$ de Y (resp. Y_s , resp. $Y_{s,r}$) dans $\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$ (resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$, resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega))$) *faible* et $\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; K'(\Omega))$ (resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'(\Omega))$, resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'_r(\Omega))$) *faible* (i.e. on suppose ici, à la différence de ce que l'on a fait dans le cas elliptique et pour éviter des difficultés topologiques qui alourdiraient le problème de façon inessentielle, que $\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; K'(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'(\Omega))$, $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'_r(\Omega))$ sont munis de leurs topologie de dual *faible* respectivement de $\mathfrak{D}_-(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega))$, $\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Omega))$, $\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}_r(\Omega))$, $\mathfrak{D}_-(\mathbf{R}; K(\Omega))$, $\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; K(\Omega))$, $\mathfrak{D}_{-,s}(\mathbf{R}; K_r(\Omega))$).

Par les mêmes méthodes qu'en [15] (signalons que sous les hypothèses plus générales sur P et les B_j faites ici au n. 7 on utilisera les résultats d'Agranovich-Vishik [1] et de Cavallucci [6], pour l'existence des solutions régulières du problème adjoint, et que les difficultés topologiques rencontrées dans [13], p. 393 peuvent maintenant être surmontées grâce aux résultats récents de Geymonat [9]) on démontre alors les théorèmes:

THEOREME 5 (de trace): *L'espace $\mathfrak{D}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ est dense dans Y (resp. Y_r , resp. $Y_{s,r}$, avec $s \geq 2m$ et $r > 1$) et l'application $u \rightarrow Bu = \{B_0 u, \dots, B_{m-1} u\}$ définie au sens usuel de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\bar{\Omega}))$ dans $[\mathfrak{D}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}(\Gamma))]^m$ se prolonge par*

(10) Notons que si u est dans ces espaces Pu a un sens (par la définition usuelle $\langle Pu, \varphi \rangle = \langle u, P^* \varphi \rangle$).

(11) Nous définissons

$$\mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; K'(\Omega)) = (\mathfrak{D}_-(\mathbf{R}; K(\Omega)))';$$

cfr. aussi remarque 5.

continuité en une application linéaire continue encore notée $u \rightarrow Bu$, de Y (resp. Y_s , resp. $Y_{s,r}$) dans $[\mathfrak{D}'_{+,2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}'(\Gamma))]^m$ faible (i.e. muni de la topologie de dual faible de $[\mathfrak{D}_{-,2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}(\Gamma))]^m$).

THEOREME 6 (d'existence): *Le problème aux limites*

$$(44) \quad Pu = f$$

au sens de $\mathfrak{D}'(Q)$ (resp. $\mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$, resp. $\mathfrak{D}'_s(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega))$, avec $s \geq 2m$, et $r > 1$,

$$(45) \quad B_j u = g_j \quad j = 0, \dots, m-1$$

au sens du Théorème 5, admet une solution unique u dans Y (resp. Y_s , resp. $Y_{s,r}$) pour tout $f \in \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; K'(\Omega))$ (resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'(\Omega))$, resp. $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; K'_r(\Omega))$) et tout $g_j \in \mathfrak{D}'_{+,2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}'(\Gamma))$; en outre l'application $(f; g_0, \dots, g_{m-1}) \rightarrow u$ est continue, chaque espaces étant muni de la topologie faible de dual.

Remarque 6. — On pourrait dans les Théorèmes 3 et 4 prendre au lieu des espaces $K'(\Omega)$ et $K'_r(\Omega)$ des espaces plus généraux de distributions ou d'ultra-distributions, dépendant des opérateurs « frontière » $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$.

9. Grâce aux théorèmes 5 et 6 les différents espaces $Y, Y_s, Y_{s,r}$ ont tous le même espace de « traces »: $[\mathfrak{D}'_{+,2m}(\mathbf{R}; \mathcal{H}'(\Gamma))]^m$. On en déduit alors, en utilisant aussi (30) une conséquence analogue à celle obtenue pour les équations elliptiques au Corollaire 1:

COROLLAIRE 2: *Toute ultradistribution u de $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'(\Omega))$ ou de $\mathfrak{D}'_{+,s}(\mathbf{R}; \mathfrak{D}'_r(\Omega))$ avec $s \geq 2m$ et $r > 1$, solution de l'équation $Pu = f$ avec (par exemple) $f \in \mathfrak{D}'_+(\mathbf{R}; \Xi'(\Omega))$ est une distribution ordinaire (scalaire) dans Q (i.e. $u \in \mathfrak{D}'(Q)$).*

Le Corollaire 2 réduit donc le problème de la régularité des solutions ultradistributions de Gevrey (d'ordre $s \geq 2m$ en t) des équations paraboliques au cas déjà résolu des solutions distributions ordinaire, au moins pour les ultradistributions à support scalairement limité à gauche. Dans le cas des opérateurs à coefficients constants un résultat de ce genre est contenu aussi dans le travail [6] de Björck, qui étudie par des méthodes différentes de la notre le problème de la régularité des solutions ultradistributions de Beurling pour les opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants.

10. Signalons enfin que par des méthodes analogues on peut étudier les mêmes questions dans d'autres situations:

a) on peut caractériser les espaces de traces sur Σ des $B_j u$ pour les solutions de l'équation $Pu = f$, ultradistributions à support quelconque, et étudier le problème aux limites (38) (39) dans le cylindre Q .

b) on peut étudier les problèmes aux limites paraboliques dans un *cylindre fini*, $Q_T = \Omega \times]0, T[$, $T < \infty$:

$$\begin{aligned} Pu &= f && \text{dans } Q_T \\ B_j u &= g_j && \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times]0, T[\\ u(x, 0) &= u_0 && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

c) on peut étudier les problèmes précédents pour les opérateurs du deuxième ordre en t (du type $Au + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$) et de Schroedinger (du type $iAu + \frac{\partial u}{\partial t}$) avec A symétrique.

Les difficultés techniques sont beaucoup plus grandes; nous renvoyons au vol. 3 de notre livre [17] (cfr. déjà [14] et [16]).