Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luciano de Vito

Sulle ipotesi di un teorema relativo all'approssimazione delle funzioni olomorfe

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.6, p. 453–463.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_453_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Analisi matematica. — *Sulle ipotesi di un teorema relativo all'approssimazione delle funzioni olomorfe.* Nota di LUCIANO DE VITO, presentata (*) dal Corrisp. G. FICHERA.

SUMMARY. — Let A be a bounded domain whose boundary Σ is a closed Jordan curve. If $\Sigma \in C^{1,h}$, a necessary and sufficient condition has been given for the uniform approximation of a function f, holomorphic in A and continuous in $A \cup \Sigma$, by rational functions with prescribed poles. In this paper one proves that the theorem fails to be true under the only assumption $\Sigma \in C^1$.

Sia A un campo (insieme aperto) limitato del piano della variabile complessa w, avente per frontiera una curva di Jordan semplice e chiusa Σ. Siano assegnati una successione di punti $\{w_n\}$ (con $n = 1, 2, \cdots$ e con $w_m \neq w_n$ se $m \neq n$) ed una successione di interi positivi $\{\nu_n\}$. I punti w_n siano tutti esterni ad A. Si indichi con $\{R_m(w)\}$ il sistema di funzioni razionali ottenuto ordinando in un'unica successione tutte le funzioni $\frac{1}{w - w_n}$, $\frac{1}{(w - w_n)^2}$, $\frac{1}{(w - w_n)^3}, \cdots, \frac{1}{(w - w_n)^{\nu_n}}$; $n = 1, 2, \cdots$. Sia $\Omega(A)$ lo spazio di Banach delle funzioni $f(w)$ continue in $A \cup \Sigma$ ed olomorfe in A, dotato della norma $\|f\| = \max_{w \in A \cup \Sigma} |f(w)|$. È stato dimostrato da G. Fichera il seguente teorema (1): supposto che Σ sia una curva di classe $C^{1,h}$, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema $\{R_m(w)\}$ sia completo in $\Omega(A)$ è che $\sum_1^\infty \nu_n \operatorname{dist}(w_n, \Sigma) = +\infty$ (2). Fichera ha anche provato che il teorema, in generale, non è vero, se sulla curva di Jordan Σ non si fa l'ipotesi che essa sia di classe C^1 (così, ad esempio, il teorema non è, in generale, vero se Σ presenta un punto angoloso). Restava aperto il problema di decidere la validità o meno del teorema nell'ipotesi che Σ sia di classe C^1 (senza l'ulteriore condizione $\Sigma \in C^{1,h}$). Scopo della presente Nota è di mostrare che, se si fa soltanto l'ipotesi $\Sigma \in C^1$, il teorema non è più – in generale – vero.

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1967.

(1) Si vedano i seguenti lavori di G. FICHERA: a) *Approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe mediante funzioni razionali aventi poli semplici prefissati*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Nota I e II, ser. VIII, vol. XXVII, 1959; b) *Sull'approssimazione uniforme delle funzioni olomorfe con funzioni razionali aventi i poli prefissati*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXX, 1961; c) *Sull'approssimazione delle funzioni olomorfe con funzioni razionali*, in corso di stampa su « Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. di Torino ». Nel lavoro *b*) il teorema è dimostrato supponendo $\Sigma \in C^2$; in c) esso è ottenuto nell'ipotesi che la curva Σ sia di classe $C^{1,h}$.

(2) Con il simbolo dist (T_1, T_2), ove T_1 e T_2 sono due insiemi (uno dei quali può esser anche costituito da un sol punto: per esempio dal punzo z), intendiamo indicare la distanza tra i due insiemi T_1 e T_2.

Usando i ragionamenti contenuti nel lavoro citato con la lettera b) nella nota [1], si vede che il nostro asserto sarà provato non appena avremo fatto vedere che, rappresentato conformemente l'esterno E di A sul campo circolare $|z| < 1$ del piano della variabile z, esiste una successione $\{w_n\}$ di punti di E tale che, detta z_n l'immagine di w_n nella predetta rappresentazione conforme, riesce:

$$\sum_1^\infty{}_n (1 - |z_n|) < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty{}_n \operatorname{dist}(w_n, \Sigma) = +\infty .$$

Assumeremo come curva Σ, del piano della w, l'immagine, nella rappresentazione conforme $w = 1/\zeta$, della frontiera $\mathfrak{F}$D di un qualsiasi dominio D, del piano della variabile complessa $\zeta \equiv \xi + i\eta$, verificante le seguenti condizioni:

1) per ogni $\zeta \in \mathrm{D}$ si ha: $|\zeta| \leq 1$; 2) D è simmetrico rispetto all'asse ξ e contiene nel suo interno il punto $\zeta = 0$; 3) $\mathfrak{F}$D è una curva regolare, semplice, chiusa, rappresentabile in forma parametrica al modo seguente: $\zeta = \zeta(t) \equiv \xi(t) + i\eta(t)\,,\, -1 \leq t \leq 1$, con:

$$(1) \qquad \zeta(t) = \overline{\zeta(-t)}\ ^{(3)} \quad \text{per} \quad -1 \leq t \leq 1, \qquad \eta(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1;$$

inoltre $\zeta(t)$ è di classe C^1 in $-1 \leq t \leq 1$ e di classe C^s, con $s \geq 2$, in ciascuno dei due insiemi $-1 \leq t < 0\,,\, 0 < t \leq 1$, riuscendo $\left[\frac{d^k}{dt^k}\zeta(t)\right]_{t=-1} = \left[\frac{d^k}{dt^k}\zeta(t)\right]_{t=1}$, $k = 0, 1, \cdots, s$; infine esiste t_0, con $0 < t_0 < 1$, tale che:

$$(2) \qquad \zeta(t) = 1 + \int_0^t \frac{1}{\log \tau}\, d\tau + it \qquad \text{per} \quad 0 \leq t \leq t_0 .$$

Per dimostrare la nostra tesi ci basta, ovviamente, far vedere che, se $\zeta = f(z)$ è una rappresentazione conforme del campo circolare $|z| < 1$ su D — $\mathfrak{F}$D, esiste una successione $\{z_n\}$ di punti del piano della variabile z tale che $|z_n| < 1$ ed inoltre:

$$(3) \qquad \sum_1^\infty{}_n (1 - |z_n|) < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty{}_n \operatorname{dist}(f(z_n), \mathfrak{F}\mathrm{D}) = +\infty,$$

(dato che l'ultima di queste due serie e la serie $\sum_1^\infty{}_n \operatorname{dist}\left(\frac{1}{f(z_n)}, \Sigma\right)$ convergono oppure divergono assieme).

Poiché $\mathfrak{F}$D è di classe C^1 (in forza della condizione 3)), la funzione $\zeta = f(z)$ si prolunga, per continuità, su tutto il dominio circolare $C : |z| \leq 1$ e, dopo esser stata così prolungata, fornisce l'equazione di un omeomorfismo

(3) Se z è un numero complesso, con $\bar{z}$ indichiamo il suo coniugato.

di classe C^0 di C su D (4). Sceglieremo la f determinata dalle seguenti due condizioni:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1. \tag{4}$$

Indichiamo con $z = f^{-1}(\zeta)$ l'inversa della $\zeta = f(z)$. La simmetria del dominio D rispetto all'asse ξ (punto 2)) e quella delle condizioni (4) implicano, ovviamente: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $f^{-1}(\bar{\zeta}) = \overline{f^{-1}(\zeta)}$ e quindi:

$$\arg f^{-1}(\zeta) = -\arg f^{-1}(\bar{\zeta}) \text{ (5)}, \qquad \zeta \in D - 0. \tag{5}$$

Posto $\vartheta = \arg z$, indichiamo con $\vartheta = \vartheta(t)$ l'equazione della corrispondenza che associa al punto t di $-1 < t < 1$ il numero $\arg f^{-1}[\zeta(t)]$. Come è noto, $\vartheta = \vartheta(t)$ è l'equazione di un omeomorfismo di classe C^0 di $\mathfrak{F}D$ su $\mathfrak{F}C$ (6). Da (1) (5) viene:

$$\vartheta(t) = -\vartheta(-t) \quad , \quad -1 < t < 1. \tag{6}$$

Inoltre $\vartheta(t)$ è una funzione crescente ed assolutamente continua nell'intervallo $-1 < t < 1$ (7).

Poniamo $z = x + iy$. Dimostriamo che:

I. *Nelle dette ipotesi, riesce*:

$$\max_{x \to 1^-} \lim \frac{f(x) - 1}{x - 1} + \max_{z \to 1 \,(\text{su } \mathfrak{F}C)} \lim \left| \frac{f(z) - 1}{z - 1} \right| = +\infty. \tag{7}$$

Supponiamo, per assurdo, che esista un numero L tale che, definitivamente per z che tende a 1 su $\mathfrak{F}C$ e per x che tende a 1^-, riesca:

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} < L \quad , \quad \left| \frac{f(z) - 1}{z - 1} \right| < L. \tag{8}$$

Come è noto, la funzione $\log |f(z)/z|$ (definita in $z=0$ mediante il valore limite $\log f'(0)$) risulta continua in C ed armonica in $C - \mathfrak{F}C$. Si ha allora, per $-1 < x < 1$:

$$\log \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\vartheta})| \frac{\partial \log |x - e^{i\vartheta}|}{\partial \nu_\vartheta} d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(e^{i\vartheta})| \, d\vartheta,$$

(4) Di più, si può dire che $f(z)$ è, su $\mathfrak{F}C$, uniformemente hölderiana con ogni esponente < 1 (cfr. M. M. LAVRENTIEFF, *Sur la répresentation conforme*, «C.R. Acad. Sci.», t. 84, 1927).

(5) Con $\arg z$ intendiamo l'*argomento* di z compreso tra $-\pi$ e π.

(6) Di più, si può dire che tale omeomorfismo è uniformemente hölderiano nei due sensi con ogni esponente < 1 (cfr. loc. cit. nota (4)).

(7) Di più, si può dire che $\dfrac{d\vartheta(t)}{dt}$ e $\left(\dfrac{d\vartheta(t)}{dt}\right)^{-1}$ appartengono a $\mathfrak{L}^p(-1, 1)$ con ogni esponente $p > 0$ (cfr. C. GATTEGNO, A. OSTROWSKI, *Répresentation conforme à la frontière; domaines particuliers*, «Mém. des Sci. Math.», fasc. CX, 1949, p. 35; il risultato si deve a S. WARSCHAWSKI, *Ueber einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung*, «Gött. Nach.», 1930).

ove con ν_ϑ si è indicata la normale interna a $\mathfrak{F}C$ nel punto $e^{i\vartheta}$. Dopo aver eseguito un'integrazione per parti, per ogni x tale che $-1 < x < 1$, riesce:

$$\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{d}{d\vartheta}\log|f(e^{i\vartheta})|\right]\frac{\partial \arg(e^{i\vartheta}-x)}{\partial x}\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\vec{\zeta}(t)\cdot\vec{\zeta}'(t)}{|\zeta(t)|^2}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x-e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt\ ^{(8)},$$

donde, tenendo presente (1) (6):

$$\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{x} = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{t_0}\frac{\xi(t)\,\xi'(t)}{|\zeta(t)|^2}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x-e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt - \tag{9}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{t_0}\frac{t}{|\zeta(t)|^2}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x-e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt - \frac{2}{\pi}\int_{t_0}^{1}\frac{\vec{\zeta}(t)\cdot\vec{\zeta}'(t)}{|\zeta(t)|^2}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x-e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt.$$

D'altra parte, per un noto risultato, in conseguenza di 1) e di (4), esiste, ed è maggiore di 1, il limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ e, se tale limite è finito, esiste anche, ed è maggiore di 1, il limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{d}{dx}f(x)$ (e tali due limiti coincidono [9]). Poiché, per la prima delle (8), il limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ deve essere finito, si conclude che esiste finito, e maggiore di 1, anche il limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{d}{dx}f(x)$, da cui, ovviamente:

$$\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{x} = \mathcal{O}(1) \qquad \text{per } x \to 1^-. \tag{10}$$

Ma l'ultimo addendo del secondo membro di (9) è, ovviamente, limitato in $0 < x < 1$, e limitato è pure, in tale insieme, il secondo addendo del secondo membro di (9), dato che:

$$\int_{0}^{t_0}\frac{t}{|\zeta(t)|^2}\,\frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x-e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt = \mathcal{O}\left[\int_{0}^{t_0}\frac{t}{\vartheta(t)}\,dt\right],\ 0 < x < 1,$$

(8) Se con z indichiamo un numero complesso, con $\vec{z}$ denotiamo il vettore a due componenti, che ha come prima componente $\mathfrak{R}z$ (cioè la parte reale di z) e come seconda componente $\mathfrak{I}z$ (cioè il coefficiente della sua parte immaginaria).

(9) Cfr. C. GATTEGNO e A. OSTROWSKI, *Représentation conforme à la frontière; domaines généraux*, « Mém. Sci. Math. », fasc. CIX, 1949, p. 17; tale risultato è implicitamente contenuto in: J. WOLFF, *Sur une généralization d'un théorème de Schwarz*, « C. R. Acad. Sc. », t. 183, 1926; esso fu poi ritrovato da C. CARATHÉODORY, *Ueber die Winkelderivierten von beschraenkten analytischen Funktionen, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1929, e da E. LANDAU e G. VALIRON, *A deduction from Schwarz Lemma*, « Journal London Math. Soc. », t. 4, 1929.

e dato che, per la seconda delle (8), si ha: $t/\vartheta(t) = \mathcal{O}(1)$, $0 < t \leq t_0$ [10].
Da qui e dalle (9) (10) si trae:

$$\int_0^{t_0} \frac{\xi(t)\,\xi'(t)}{|\zeta(t)|^2} \frac{\operatorname{sen}\vartheta(t)}{|x - e^{i\vartheta(t)}|^2}\,dt = \mathcal{O}(1), \quad \text{per } x \to 1^-.$$

Da questa relazione si deduce facilmente che:

$$\int_0^{t_0} \frac{1}{|\log t|\,\vartheta(t)}\,dt < +\infty. \tag{11}$$

Per il risultato sopra citato (cfr. nota [9]) si deduce anche che esiste, non nullo e minore di 1, il limite $\lim\limits_{\xi \to 1^-} \frac{d}{d\xi} f^{-1}(\xi)$, donde:

$$\frac{d}{d\xi} \log f^{-1}(\xi) = \mathcal{O}(1) \quad \text{per } \xi \to 1^-. \tag{12}$$

Detta r la semiretta definita da $\xi \leq 0$, $\eta = 0$, ed indicato con A_0 un campo contenuto in $D - r$, la cui frontiera $\mathcal{F}A_0$ sia una curva regolare semplice chiusa di classe C^1, tale che $r \cap \mathcal{F}A_0 = \varnothing$, $(\mathcal{F}D) \cap (\mathcal{F}A_0) = \Lambda$, ove Λ è l'arco d'equazione parametrica $\zeta = \zeta(t)$, $-t_0 \leq t \leq t_0$, per ogni $\xi \in A_0$ riesce:

$$\log f^{-1}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A_0} \arg[f^{-1}(w)]\, \frac{\partial \log|\xi - w|}{\partial s_w}\,ds_w -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{(\mathcal{F}A_0)-\Lambda} \log|f^{-1}(w)|\, \frac{\partial \log|\xi - w|}{\partial \nu_w}\,ds_w \text{ [11]}.$$

Da qui e da (12) si trae:

$$\frac{d}{d\xi} \int_{\mathcal{F}A_0} \arg[f^{-1}(w)]\, \frac{\partial \log|\xi - w|}{\partial s_w}\,ds_w = \mathcal{O}(1) \quad , \quad \text{per } \xi \to 1^-.$$

(10) Basta infatti osservare che:

$$\frac{t}{\vartheta(t)} = \frac{t}{|\zeta(t) - 1|} \, \frac{|\zeta(t) - 1|}{\vartheta(t)} \leq L \max_{-1 \leq t \leq 1} \frac{1}{|\zeta'(t)|}.$$

(11) Sussiste, infatti, il seguente risultato: se il campo limitato A_0 ha per frontiera una curva regolare semplice chiusa di classe C^1, e se φ è una funzione di classe $C^{0,h}$ su $\mathcal{F}A_0$, con $h > 1/2$, detta u la funzione di $C^0(A_0 \cup \mathcal{F}A_0)$ armonica in A_0 e coincidente su $\mathcal{F}A_0$ con φ, e detta v una coniugata armonica di u in A_0, la v riesce continua in $A_0 \cup \mathcal{F}A_0$ e, per $\zeta \in A_0$, risulta:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{F}A_0} \left[v(w)\, \frac{\partial \log|\zeta - w|}{\partial s_w} - \varphi(w)\, \frac{\partial \log|\zeta - w|}{\partial \nu_w} \right] ds_w.$$

Da questa relazione, con un calcolo elementare, segue:

$$\int_0^{t_0} \vartheta(t) \frac{1}{t^2 |\log t|} dt < +\infty,$$

la quale è in contrasto con (11), come facilmente si constata. Il teorema I è, così, dimostrato.

Dal teorema ora provato si deduce, in particolare, che deve esser soddisfatta almeno una delle due seguenti condizioni.

$$a) \qquad \max \lim_{z \to 1 (\text{su } \mathfrak{F}C)} \left| \frac{f(z) - 1}{z - 1} \right| = +\infty,$$

$$b) \qquad \max \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = +\infty.$$

In quel che segue, ci tornerà utile la seguente notazione: se $z \in (C - \mathfrak{F}C) - 0$, con $\tilde{z}$ denoteremo il punto di $\mathfrak{F}C$ che ha minima distanza da z; se $\tilde{z}$ è un punto di $\mathfrak{F}C$, z sarà un punto del segmento di estremi 0 e $\tilde{z}$.

II. *Esiste un aperto* $B \subset C$ *che soddisfa le seguenti condizioni*: I) *per ogni* $z \in (\mathfrak{F}C) - 1$, *l'insieme* $\nu_z \cap B$ (12) *è un segmento avente un estremo in* z, II) *per ogni* $z \in B$ *riesce* $\frac{|f(z) - f(\tilde{z})|}{\operatorname{dist}(f(z), \mathfrak{F}D)} \leq M$, *ove* M *è una costante dipendente solo da* B.

Sia l un numero positivo e, per ogni $\zeta \in \mathfrak{F}D$, diciamo T_ζ il triangolo equilatero, pensato come insieme aperto, avente il lato di lunghezza l, un vertice in ζ ed il centro su ν_ζ. Si può fissare l in guisa tale che, per ogni $\zeta \in \mathfrak{F}D$, risulti: $T_\zeta \subset (D - \mathfrak{F}D) - 0$. Indichiamo con T'_ζ il triangolo contenuto in T_ζ e determinato dalle seguenti condizioni: T'_ζ ha un vertice in ζ e l'angolo interno di T'_ζ in ζ ha ampiezza $\pi/6$; inoltre T'_ζ è simmetrico rispetto a ν_ζ, e la distanza tra ζ ed il lato di T'_ζ opposto al vertice ζ, è eguale a $l/2$. Sia $z \in (\mathfrak{F}C) - 1$ e sia Λ_z il trasformato, per f, del segmento che va da z a 0. Evidentemente Λ_z è un arco di curva regolare che incontra ortogonalmente $\mathfrak{F}D$ in $\zeta = f(z)$. Sia Λ'_z l'arco di Λ_z che ha in comune con $\mathfrak{F}T'_{f(z)}$ soltanto i suoi due estremi, uno dei quali coincida proprio con $\zeta \equiv f(z)$ (in altre parole, sia Λ'_z l'arco di lunghezza massima, contenuto in Λ_z, uscente da $\zeta \equiv f(z)$ ed interno a $T'_{f(z)}$). Assumiamo come B il campo contenuto in C, la cui intersezione con ν_1 è vuota e la cui intersezione con ν_z, per $z \in (\mathfrak{F}C) - 1$, è costituita dal trasformato, per f^{-1}, dell'arco Λ'_z (privato dei suoi estremi). È subito visto che B verifica I). Per provare II) basta osservare che, se $z \in B$, risulta $\zeta \equiv f(z) \in T'_{f(\tilde{z})}$ e quindi: $\operatorname{dist}(f(z), \mathfrak{F}D) \geq |f(z) - f(\tilde{z})| \operatorname{sen}(\pi/12)$, donde: $M = 1/\operatorname{sen}(\pi/12)$.

(12) Qui e nel seguito, con il simbolo ν_z, quando $z \in \mathfrak{F}C$, intenderemo indicare indifferentemente il versore normale interno a $\mathfrak{F}C$ in z ed il segmento che costituisce il supporto di tale versore (pensato come un particolare insieme del piano). Analoga convenzione faremo per ν_ζ, quando ζ sarà un punto di $\mathfrak{F}D$.

III. *Se è verificata la condizione a), esistono una successione di numeri reali* $\{y_m\}$ *decrescente infinitesima, ed una funzione* $x = x(y)$, *definita nell'insieme* $\mathcal{T} \equiv \bigcup_{1}^{\infty}{}_m (y_{2m+1}, y_{2m})$ *dell'asse y, che godono delle seguenti proprietà*:

1) $x(y)$ *è reale positiva, e costante su ciascuno degli intervalli componenti* $\mathcal{T}$;

2) $\lim\limits_{y \to 0 (\text{su } \mathcal{T})} x(y) = 1$;

3) *per ogni* $y \in \mathcal{T}$, *si ha* $x(y) + iy \in C - \mathcal{F}C$;

4) $\min\limits_{y_{2m+1} \leq y \leq y_{2m}} [1 - |x(y) + iy|] > \max\limits_{y_{2m+3} \leq y \leq y_{2m+2}} [1 - |x(y) + iy|]$;

5) $\min\limits_{y_{2m+1} \leq y \leq y_{2m}} \operatorname{dist} [f(x(y) + iy), \mathcal{F}D)] > \max\limits_{y_{2m+3} \leq y \leq y_{2m+2}} \operatorname{dist} [f(x(y) + iy), \mathcal{F}D]$;

6) $\max\lim\limits_{y \to 0 (\text{su } \mathcal{T})} \dfrac{\operatorname{dist} [f(x(y) + iy), \mathcal{F}D]}{1 - |x(y) + iy|} = +\infty.$

In conseguenza di a), che, per ipotesi, supponiamo verificata, esiste almeno un punto $\tilde{z}_1 \in (\mathcal{F}C) - 1$, con $\Re \tilde{z}_1 > 0$, $\Im \tilde{z}_1 > 0$ (13), tale che $|f'(\tilde{z}_1)| > 1$. E dunque esisterà almeno un punto $z_1 \in B \cap \nu_{\tilde{z}_1}$ tale che: $\Re z_1 > 0$, $\Im z_1 > 0$, $\dfrac{|f(z_1) - f(\tilde{z}_1)|}{|z_1 - \tilde{z}_1|} > 1$. Sia S_1 un segmento parallelo all'asse y, avente centro in z_1, contenuto in $C - \mathcal{F}C$ e nel semipiano $y > 0$. Diciamo (y_3, y_2) l'intervallo proiezione di S_1 sull'asse y; sarà, ovviamente: $0 < y_3 < y_2$. L'equazione parametrica di S_1, rispetto al parametro y, sarà $x = x(y)$, $y_3 \leq y \leq y_2$ con $x(y) \equiv \Re z_1$. Si può, evidentemente, scegliere $\tilde{z}_1$ così vicino ad 1, z_1 così vicino a $\tilde{z}_1$ ed S_1 così piccolo che – per la continuità di f in C – l'arco $f(S_1)$ risulti contenuto nell'insieme $\xi > 0$, $\eta > 0$.

Ancora in conseguenza di a), esiste almeno un punto $\tilde{z}_2 \in (\mathcal{F}C) - 1$, tale che:

$$\Re \tilde{z}_2 > \Re \tilde{z}_1 \quad , \quad 0 < \Im \tilde{z}_2 < y_3 \quad , \quad |f'(\tilde{z}_2)| > 2.$$

E dunque esisterà almeno un punto $z_2 \in B \cap \nu_{\tilde{z}_2}$ tale che:

$$\Re z_2 > \Re z_1 \quad , \quad 0 < \Im z_2 < y_3 \quad , \quad \frac{|f(z_2) - f(\tilde{z}_2)|}{|z_2 - \tilde{z}_2|} > 2.$$

Sia S_2 un segmento parallelo all'asse y, avente centro in z_2, contenuto in $C - \mathcal{F}C$ e nel semipiano $y > 0$. Diciamo (y_5, y_4) l'intervallo proiezione di S_2 sull'asse y; sarà, ovviamente: $0 < y_5 < y_4$. L'equazione parametrica di S_2, rispetto al parametro y, sarà: $x = x(y)$, $y_5 \leq y \leq y_4$, con $x(y) \equiv \Re z_2$. Si può, evidentemente, scegliere $\tilde{z}_2$ così vicino a 1, z_2, così vicino a $\tilde{z}_2$, ed S_2 così piccolo che,

(13) Come si è già avvertito, con $\Re z$ intendiamo la parte reale del numero complesso z e con $\Im z$ il coefficiente della sua parte immaginaria.

per la continuità di f in C, l'arco $f(S_2)$ risulti tutto contenuto in $\xi > 0$, $\eta > 0$, ed inoltre riesca:

$$y_4 < y_3,$$

$$\min_{y_3 \leq y \leq y_2} [1 - |x(y) + iy|] > \max_{y_5 \leq y \leq y_4} [1 - |x(y) + iy|],$$

$$\min_{y_3 \leq y \leq y_2} \operatorname{dist}[f(x(y) + iy), \mathfrak{F}D] > \max_{y_5 \leq y \leq y_4} \operatorname{dist}[f(x(y) + iy), \mathfrak{F}D].$$

Così procedendo si viene a definire la successione $\{y_m\}$ e la funzione $x(y)$ verificanti 1)...6), come è ben evidente.

Siano ora $f_1(y)$ e $f_2(y)$ due funzioni reali che godono delle seguenti proprietà: I) $f_j(y)$ è definita in un insieme $\mathcal{C}$, dell'asse reale y, composto dall'unione di un numero discreto [14] di intervalli chiusi contenuti nel semiasse $y > 0$: $I_1, I_2, I_3, \cdots$, a due a due privi di punti interni in comune, tali che ogni $y \in I_k$ sia $\geq$ di ogni $y \in I_{k+1}$, e tali che $y = 0$ sia l'unico punto d'accumulazione per la successione $\{I_k\}$; II) $f_j(y)$ è positiva in $\mathcal{C}$ e infinitesima, per y che tende a zero su $\mathcal{C}$; III) fissato k, la f_j è continua nei punti interni a I_k e in ciascun punto di $\mathfrak{F}I_k$ presenta, al più, una discontinuità di prima specie, riuscendovi continua a destra o a sinistra; IV) per ogni k si ha:

$$\inf_{y \in I_k} f_j(y) \geq \sup_{y \in I_{k+1}} f_j(y).$$

IV. *Se* $f_1(y)$ *e* $f_2(y)$ *sono due funzioni che verificano le ipotesi* I)...IV) *ora dette, e se*:

$$\max_{y \to 0 \, (\text{su } \mathcal{C})} \lim \frac{f_2(y)}{f_1(y)} = +\infty, \tag{13}$$

esiste una successione di numeri reali $\{\bar{y}_m\}$, *decrescente infinitesima, con* $\bar{y}_m \in \mathcal{C}$, *tale che*:

$$\sum_1^{\infty}{}_m f_1(\bar{y}_m) < +\infty \quad , \quad \sum_1^{\infty}{}_m f_2(\bar{y}_m) = +\infty. \tag{14}$$

Non è restrittivo supporre che, per ogni k, esista un $y_k \in I_k - \mathfrak{F}I_k$, tale che:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f_2(y_k)}{f_1(y_k)} = +\infty. \tag{V}$$

È subito visto allora che si può definire una successione di intervalli $\{\tilde{I}_k\}$, con $\tilde{I}_k \subset I_k$, $y_k \subset \tilde{I}_k$, ed una coppia di funzioni $\tilde{f}_1(y)$, $\tilde{f}_2(y)$ tali che, posto $\tilde{\mathcal{C}} = \bigcup_k \tilde{I}_k$, le $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ e $\tilde{\mathcal{C}}$ verifichino le ipotesi I)...V), e, in più, si abbia: VI) $\tilde{f}_j(y)$ è crescente su $\tilde{\mathcal{C}}$; si può inoltre imporre la condizione: $\tilde{f}_1(y) \geq f_1(y)$,

(14) Con il termine «discreto» intendiamo: finito o numerabile.

$\tilde{\tilde{f}}_2(y) \leq f_2(y)$, $y \in \tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$. Basterà allora provare che esiste $\{\bar{y}_m\}$, con $\bar{y}_m \in \tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$, tale che:

$$(15) \qquad \sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_1(\bar{y}_m) < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_2(\bar{y}_m) = +\infty,$$

dato che dalla convergenza della serie $\sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_1(\bar{y}_m)$ si deduce quella di $\sum_1^\infty{}_m f_1(\bar{y}_m)$ e dalla divergenza della serie $\sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_2(\bar{y}_m)$ si deduce quella di $\sum_1^\infty{}_m f_2(\bar{y}_m)$.

Possiamo ora supporre che $\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_k$ abbia uno (ed uno solo) punto in comune con $\tilde{\tilde{\mathrm{I}}}_{k+1}$, e quindi $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ sia un intervallo; infatti, se non ci troviamo in questa situazione, possiamo sempre ricondurci ad essa con una trasformazione che muti $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ non connesso in un nuovo $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ connesso. È anche lecito supporre che $\tilde{\tilde{f}}_1(y)$ e $\tilde{\tilde{f}}_2(y)$ siano lineari a tratti in $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}} - 0$ [15], come è evidente [16]. Del pari, non è restrittivo supporre che $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$ sia l'intervallo $(0, 1)$ e che il codominio di $\tilde{\tilde{f}}_j(y)$ coincida con $(0, j)$, $j = 1, 2$.

Per dimostrare la tesi, cioè per provare (15), è sufficiente far vedere l'esistenza di una funzione $\varphi(t)$ definita in $1 \leq t < +\infty$, sempre positiva, non crescente, infinitesima per $t \to \infty$, il cui codominio sia contenuto in $(0, 1)$, tale che:

$$(16) \qquad \int_1^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}_1[\varphi(t)]\, dt < +\infty \quad , \quad \int_1^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}_2[\varphi(t)]\, dt = +\infty .$$

Infatti, dato che $\tilde{\tilde{f}}_j[\varphi(t)]$ è non crescente in $(1, +\infty)$, posto $\varphi(m) = \bar{y}_m$, l'integrale $\int_1^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}_j[\varphi(t)]\, dt$ e la serie $\sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_j(\bar{y}_m)$ convergono oppure divergono assieme.

(15) Cioè ogni intervallo chiuso, escludente l'origine e contenuto in $\tilde{\tilde{\mathcal{C}}}$, si lascia decomporre in un numero finito di intervalli chiusi, a due a due privi di punti interni in comune, su ognuno dei quali la $\tilde{\tilde{f}}_j$ coincide con una funzione lineare.

(16) Se, infatti, le $\tilde{\tilde{f}}_1$ e $\tilde{\tilde{f}}_2$ non verificano tale ipotesi, è possibile sostituirle con due nuove funzioni φ_1 e φ_2 che la soddisfino, che verifichino tutte le altre ipotesi ammesse per $\tilde{\tilde{f}}_1$ e $\tilde{\tilde{f}}_2$ e tali che: $\varphi_1 \geq \tilde{\tilde{f}}_1$, $\varphi_2 \leq \tilde{\tilde{f}}_2$, in guisa tale che il teorema risulta dimostrato se si prova l'esistenza di $\{\bar{y}_m\}$ verificante le seguenti relazioni:

$$\sum_1^\infty{}_m \varphi_1(\bar{y}_m) < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty{}_m \varphi_2(\bar{y}_m) = +\infty .$$

In effetti, dalla convergenza della serie $\sum_1^\infty{}_m \varphi_1(\bar{y}_m)$ segue quella di $\sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_1(\bar{y}_m)$ e dalla divergenza della serie $\sum_1^\infty{}_m \varphi_2(\bar{y}_m)$ segue quella di $\sum_1^\infty{}_m \tilde{\tilde{f}}_2(\bar{y}_m)$.

Per ogni t tale che $0 < t \leq 1$, si ponga:

$$F(t) = \max \left\{ \frac{1}{t} \tilde{\tilde{f}}_2 [\tilde{\tilde{f}}_1^{-1}(t)] \, , \max_{t \leq \tau \leq 1} \frac{1}{\tau} \tilde{\tilde{f}}_2 [\tilde{\tilde{f}}^{-1}(\tau)] \right\} \text{ (17)},$$

$$g(\tau) = 1 + \int_1^\tau \frac{F'(t)}{tF(t)[\log F(t)]^2} \, dt \, , \qquad 0 < \tau \leq 1 \, .$$

La $F(t)$ risulta continua e non crescente in $0 < t \leq 1$ e tale che:

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = +\infty \, .$$

La $F(t)$ è assolutamente continua in ogni intervallo chiuso contenuto in $0 < t \leq 1$; l'insieme dei punti nei quali F non ha derivata, se non è finito, ha, come unico punto d'accumulazione, l'origine; la F', dove esiste, è sempre negativa, fuori di un insieme T, composto da un numero discreto di intervalli, a due a due disgiunti, che, se non sono in numero finito, hanno, come unico punto d'accumulazione, l'origine; nei punti di T si ha sempre $F' = 0$. Tutte queste proprietà di F seguono subito dal fatto che le $\tilde{\tilde{f}}_j$ sono lineari a tratti in $\tilde{\tilde{\mathscr{C}}} - 0$. La $g(\tau)$ gode delle stesse proprietà ora elencate per $F(t)$. Allora, la sua inversa $g^{-1}(t)$ riesce definita in $1 \leq t < +\infty$ privato di un insieme discreto di punti, avente derivato vuoto. Si vede facilmente che, posto:

$$\varphi(t) = \tilde{\tilde{f}}_1^{-1}[g^{-1}(t)] \, , \qquad 1 \leq t < +\infty \, ,$$

la φ così definita è positiva e non crescente in $1 \leq t < +\infty$, infinitesima per $t \to \infty$; inoltre $\varphi(t)$ ha codominio contenuto in $(0, 1)$ e, con un calcolo elementare, si vede che:

$$\int_1^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}_1[\varphi(t)] \, dt = \frac{1}{\log 2} \quad , \quad \int_1^{+\infty} \tilde{\tilde{f}}_2[\varphi(t)] \, dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(\log t)^2} \, dt = +\infty \, .$$

Sono così provate le (16), e quindi il teorema è dimostrato.

Possiamo ora mostrare che:

V. *Esiste una successione* $\{z_n\}$ *di punti di* $C - \mathfrak{F}C$, *tale che siano soddisfatte le* (3).

Se è verificata la condizione a), le funzioni $f_1(y) = 1 - |x(y) + iy|$, $f_2(y) = \text{dist}[f(x(y) + iy), \mathfrak{F}D]$, ove $x(y)$ è la funzione di cui al teorema III, soddisfano le ipotesi del teorema IV e quindi esiste una successione $\{\bar{y}_m\}$ tale che:

$$\sum_1^\infty{}_m [1 - |x(\bar{y}_m) + i\bar{y}_m|] < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty{}_m \text{dist}[f(x(\bar{y}_m) + i\bar{y}_m), \mathfrak{F}D] = +\infty \, .$$

Allora, la successione $\{z_n\}$, con $z_n = x(\bar{y}_n) + i\bar{y}_n$, soddisfa le (3).

(17) Se f è una funzione invertibile, con f^{-1} intendiamo la sua inversa.

Se è verificata la condizione *b*), le funzioni $f_1(y) = y$ e $f_2(y) = 1 - f(1 - y)$ soddisfano le ipotesi del teorema IV, e quindi esiste una successione $\{\bar{y}_m\}$ tale che:

$$\sum_1^\infty {}_m\, \bar{y}_m < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty {}_m\, [1 - f(1 - \bar{y}_m)] = +\infty,$$

donde, essendo:

$$\frac{1 - f(1 - y)}{\operatorname{dist}[f(1 - y), \mathfrak{F}D]} = \mathcal{O}(1) \qquad \text{per} \quad y \to 0^+,$$

si trae:

$$\sum_1^\infty {}_m\, \bar{y}_m < +\infty \quad , \quad \sum_1^\infty {}_m \operatorname{dist}[f(1 - \bar{y}_m), \mathfrak{F}D] = +\infty.$$

Allora, la successione $\{z_n\}$, con $z_n = 1 - \bar{y}_n$, soddisfa le (3).