
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico omogeneo isotropo, elettricamente conduttore, in moto vibratorio sotto dazione di un campo magnetico. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.6, p. 417–423.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_417_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 dicembre 1967

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Magnetoelasticità. — *Sulla possibilità di sforzi asimmetrici in un corpo elastico omogeneo isotropo, elettricamente conduttore, in moto vibratorio sotto l'azione di un campo magnetico.* Nota I (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

SUMMARY. — With the purpose of demonstrating the possibility of asymmetric stress in an electrical conductive elastic body, in vibratory motion under the action of a magnetic field, in this first paper we establish the equations of the motion on the admission that any cause engender on the volume elements of the body rotative couples, which are dependent on the strains and on the rotation, and which determine asymmetric stress. These stresses derive from an elastic potential, which in general is a homogeneous quadratic function of the six elements of the deformation and of the elements of the rotation.

1. Il problema delle vibrazioni di un corpo elastico omogeneo isotropo, elettricamente conduttore, nel quale per effetto del movimento e di un campo magnetico esterno si generano delle correnti elettriche di conduzione, e quindi un campo magnetico indotto che modifica lo stesso movimento, costituisce una delle questioni che attualmente va destando un notevole interesse dando luogo a un nuovo campo di ricerche che va sotto il nome di *Magnetoelasticità* [9],[12].

Ora per l'interazione che ne nasce tra il movimento vibratorio del corpo elastico e il campo magnetico indotto è possibile che ogni elemento di volume sia soggetto a una coppia che si manifesta con una dissimmetria nella distri-

(*) Presentata nella seduta del 9 dicembre 1967.

buzione degli sforzi interni, per cui questi vengono a dipendere in generale oltre che dai sei elementi della pura deformazione, anche dalle tre componenti della rotazione. Va rilevato che questa dissimmetria negli sforzi interni era già stata considerata, nel caso statico, da Voigt [1], Larmor [2], Lord Kelvin [3], Combiebac [4], ed altri, nonché dal nostro Somigliana [5], che nel tentativo di estendere la teoria dell'elasticità al caso in cui sul mezzo elastico agisce un campo magnetico variabile da punto a punto, per spiegare l'esistenza di reazioni elastiche alle rotazioni molecolari, suppone l'energia elastica W dipendente oltre che dalle sei componenti di deformazione anche dalle tre componenti della rotazione. Ottiene così, nell'ipotesi dell'isotropia, e nel caso statico, delle equazioni di equilibrio in cui intervengono le componenti di momenti agenti sugli elementi di volume, assegnati ad arbitrio.

Più recentemente questa teoria degli sforzi asimmetrici nella statica elastica ha avuto delle notevoli estensioni da parte di diversi autori (cfr. [7]); che però ammettono la presenza di momenti di rotazione sugli elementi superficiali, ciò che dallo stesso Voigt fu riconosciuto discutibile. Quando invece si considera l'azione di un campo elettromagnetico sul moto vibratorio di un corpo elastico elettricamente conduttore, ne nascono dei momenti molecolari di reazione che possono dar luogo a una distribuzione asimmetrica degli sforzi interni.

Invero, nel caso di un corpo elastico elettricamente conduttore, soggetto a un campo magnetico esterno uniforme, il problema si riduce alla considerazione di due sole equazioni differenziali vettoriali; fra di loro connesse, in cui sono funzioni incognite della posizione e del tempo, lo spostamento \mathbf{s} dei punti del mezzo elastico e il campo magnetico indotto \mathbf{h} .

La prima, quella del moto, contiene l'azione deflettente di Lorentz; la seconda è quella che governa la variabilità del campo magnetico indotto. Ora, nell'ipotesi della perfetta conducibilità elettrica del mezzo, tale da poterla ritenere infinita, supponendo il campo magnetico indotto dello stesso ordine di grandezza dello spostamento, sussiste la circostanza che detto campo magnetico indotto \mathbf{h} si esprime in funzione dello spostamento e lo si può eliminare dall'equazione del moto.

Si ha così un'unica equazione differenziale vettoriale lineare indefinita, che risulta un'estensione di quella classica e che, insieme a quella che deve essere verificata in superficie, definisce lo spostamento \mathbf{s} , essendo assegnate ad arbitrio le forze di massa e quelle superficiali non elettromagnetiche.

L'equazione del moto così ottenuta si può mettere ancora sotto la forma classica in cui l'azione degli sforzi interni, o dello *stress*, risulta uguale al gradiente di una omografia vettoriale (o tensore degli sforzi); ma questa omografia risulta ora la somma di una parte simmetrica (*dilatazione*), e di una parte emisimmetrica (*assiale*). Il doppio vettore di quest'ultima rappresenta il momento delle coppie elementari agenti sugli elementi di volume.

Anche in questo caso esiste il potenziale elastico, il quale risulta una funzione omogenea quadratica delle sei componenti della deformazione e delle tre componenti della rotazione.

Questo potenziale, nel caso dell'isotropia assiale, come fu dimostrato da Somigliana [6], è in generale la combinazione lineare a coefficienti costanti di undici invarianti quadratici e contiene quindi undici coefficienti.

Nel caso del problema magnetoelastico qui considerato detti coefficienti si riducono soltanto a tre che sono sostanzialmente i quadrati delle velocità delle onde elastiche longitudinali e trasversali e delle onde magnetodinamiche di Alfvén. Inoltre il potenziale dipende solo da otto caratteristiche che sono le sei componenti della deformazione e le due componenti della rotazione ortogonali alla direzione del campo magnetico esterno. In tal modo risultano completamente determinate le componenti distinte dello *stress*, anch'esse in numero di otto, in funzione delle stesse caratteristiche. Di conseguenza risultano determinate anche le componenti dei momenti delle coppie elementari agenti sugli elementi di volume, che si riducono solo a due, mentre la terza, parallela al campo magnetico esterno, è nulla. Questi momenti dipendono, oltre che da due componenti della rotazione anche da due dei coefficienti di scorrimento.

Infine risulta esplicitata l'equazione che deve essere verificata in superficie, la quale differisce da quella classica per l'aggiunta dei termini dipendenti dalla asimmetria degli sforzi interni e dovuti all'azione del campo magnetico.

In questo modo viene messo in evidenza un caso fisico concreto in cui può essere realizzata la asimmetria degli sforzi.

2. Consideriamo un corpo elastico in moto vibratorio sotto l'azione di forze di massa $\mathbf{F}dS$ e di forze superficiali $\mathbf{f}d\sigma$, agenti rispettivamente sugli elementi di volume dS e sugli elementi di superficie $d\sigma$. Supponiamo inoltre che sul corpo agiscano delle cause che per effetto del moto generino delle interazioni che diano luogo a rotazione degli elementi di volume con sforzi interni asimmetrici involgenti, sugli elementi di volume dS , delle coppie di momento $\mathbf{M}dS$ dipendenti dagli elementi della deformazione e dalla rotazione.

La prima equazione di D'Alembert, applicata a una porzione arbitraria S' del corpo elastico, limitata dalla superficie σ' , osservando che la risultante delle forze costituenti le coppie elementari è nulla, porge

$$(1) \quad \int_{S'} \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) dS + \int_{\sigma'} \Phi_n d\sigma = 0,$$

dove ρ è la densità del corpo, \mathbf{s} il vettore spostamento del generico punto P di esso e Φ_n lo sforzo specifico che si esercita dall'esterno sull'elemento $d\sigma$ della superficie σ' . Per la formula di Cauchy, che sussiste sempre, anche nel caso di sforzi asimmetrici, risulta [10]

$$(2) \quad \Phi_n = \alpha \Phi_x + \beta \Phi_y + \gamma \Phi_z,$$

dove, con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali O (xyz), α, β, γ sono i coseni direttori della normale all'elemento $d\sigma$ considerato, che conveniamo rivolta verso l'interno del volume S' , mentre Φ_x, Φ_y, Φ_z ,

sono gli sforzi specifici relativi agli elementi di area le cui normali sono parallele agli assi coordinati.

Sostituendo nella (1), e applicando le formule di Gauss, col solito ragionamento si deduce l'equazione indefinita

$$(3) \quad \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}.$$

L'equazione integrale dei momenti, applicata allo stesso volume S' , risulta invece

$$(4) \quad \int_{S'} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) dS + \int_{S'} \mathbf{M} dS + \int_{\sigma'} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \Phi_n d\sigma = 0,$$

che, tenendo conto della (2) e della (3), porge la seconda equazione indefinita

$$(5) \quad \mathbf{M} - (\mathbf{I} \wedge \Phi_x + \mathbf{J} \wedge \Phi_y + \mathbf{K} \wedge \Phi_z) = 0,$$

avendo indicato con $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ i versori degli assi.

Dalla (5), prendendo le componenti secondo gli assi, abbiamo

$$(5') \quad \begin{aligned} M_x &= \Phi_{yz} - \Phi_{zy} \\ M_y &= \Phi_{zx} - \Phi_{xz} \\ M_z &= \Phi_{xy} - \Phi_{yx}, \end{aligned}$$

le quali mostrano che i momenti delle coppie agenti sugli elementi di volume (riferiti all'unità di volume), dipendono dalla asimmetria degli sforzi interni.

Agli stessi risultati si perviene applicando il principio variazionale di Hamilton espresso dalla relazione

$$(6) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta L^{(e)} + \delta L^{(i)} + \delta T) dt = 0,$$

dove, per una variazione virtuale arbitraria $\delta \mathbf{s}$ dello spostamento \mathbf{s} , assoggettata alla sola condizione di annullarsi negli istanti estremi t_0, t_1 dell'intervallo di tempo considerato, il lavoro $\delta L^{(e)}$ delle forze esterne applicate, di massa e superficiali, è dato da

$$\delta L^{(e)} = \int_S \rho \mathbf{F} \times \delta \mathbf{s} dS + \int_{\sigma} \mathbf{f} \times \delta \mathbf{s} \cdot d\sigma.$$

La variazione dell'energia cinetica T in tutto l'intervallo di tempo (t_0, t_1) , risulta [10]:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T \cdot dt = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \rho \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \times \delta \mathbf{s} \cdot dS.$$

Infine il lavoro virtuale delle forze elastiche interne è dato da

$$\begin{aligned} \delta L^{(i)} &= \int_S (\Phi_x \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + \Phi_y \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + \Phi_z \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}) dS = \\ &= - \int_\sigma (\alpha \Phi_x + \beta \Phi_y + \gamma \Phi_z) \times \delta \mathbf{s} \cdot d\sigma - \int_S \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) \times \delta \mathbf{s} \cdot dS. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (6), per l'arbitrarietà della variazione $\delta \mathbf{s}$ dello spostamento \mathbf{s} , e l'arbitrarietà dell'intervallo di tempo (t_0, t_1) , tanto negli integrali di volume, come in quelli di superficie, si ottengono senz'altro la (3) e l'equazione che deve essere verificata in superficie:

$$(7) \quad \mathbf{f} - (\alpha \Phi_x + \beta \Phi_y + \gamma \Phi_z) = 0.$$

Se introduciamo l'omografia Φ degli sforzi interni, rappresentata dalla matrice asimmetrica

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{vmatrix}$$

le equazioni (3) e (7) si possono scrivere

$$(8) \quad \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) = \text{grad } \Phi$$

$$(9) \quad \mathbf{f} - \Phi \mathbf{n} = 0.$$

Indicando con $K\Phi$ la *coniugata*, o *trasposta* dell'omografia Φ [8], con

$$(10) \quad D\Phi = \frac{1}{2} (\Phi + K\Phi)$$

la sua *dilatazione*, o parte simmetrica, e con $V\Phi$ il suo *vettore*, tale che

$$(11) \quad V\Phi \wedge = \frac{1}{2} (\Phi - K\Phi)$$

ne rappresenta la parte emisimmetrica, in virtù delle (5') si ha che il momento \mathbf{M} delle coppie di reazione interne è dato da

$$(12) \quad \mathbf{M} = 2 V\Phi.$$

Poiché risulta $\Phi = D\Phi + V\Phi \wedge$, si ha

$$\text{grad } \Phi = \text{grad } D\Phi - \text{rot } (V\Phi) = \text{grad } D\Phi - \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{M},$$

e l'equazione (8) del moto e quella in superficie si possono scrivere anche

$$(13) \quad \rho \left(\mathbf{F} - \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} \right) = \text{grad } D\Phi - \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{M}$$

$$(14) \quad \mathbf{f} - D\Phi \mathbf{n} - \frac{1}{2} \mathbf{M} \wedge \mathbf{n} = 0.$$

Esse mettono in evidenza l'influenza del momento delle coppie di reazione interne sul movimento vibratorio del corpo elastico.

3. Trattandosi di movimenti vibratorii infinitesimi e isotermi esiste il potenziale elastico che, riferito all'unità di volume, indicheremo con W .

Ora, essendo u, v, w le componenti dello spostamento \mathbf{s} , se indichiamo con

$$(I5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \end{aligned}$$

le componenti della deformazione, e con

$$(I5') \quad \omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad ,$$

le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{s}$, il potenziale W nel caso considerato sarà una funzione omogenea quadratica delle nove quantità $\varepsilon_{ij}, \omega_i$. La sua variazione, dovuta a una variazione arbitraria $\delta \mathbf{s}$ dello spostamento \mathbf{s} , che rappresenta la variazione dell'energia elastica interna (riferita all'unità di volume), sarà uguale al lavoro elementare compiuto dalle forze elastiche interne, cambiato di segno. Avremo quindi

$$\begin{aligned} -\delta W &= \Phi_x \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x} + \Phi_y \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y} + \Phi_z \times \delta \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \\ &= \Phi_{xx} \delta \varepsilon_{11} + \Phi_{yy} \delta \varepsilon_{22} + \Phi_{zz} \delta \varepsilon_{33} + \frac{1}{2} (\Phi_{xy} + \Phi_{yx}) \delta \varepsilon_{12} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Phi_{yz} + \Phi_{zy}) \delta \varepsilon_{23} + \frac{1}{2} (\Phi_{zx} + \Phi_{xz}) \delta \varepsilon_{31} + \\ &+ \frac{1}{2} (\Phi_{yz} - \Phi_{zy}) \delta \omega_1 + \frac{1}{2} (\Phi_{zx} - \Phi_{xz}) \delta \omega_2 + \frac{1}{2} (\Phi_{xy} - \Phi_{yx}) \delta \omega_3 \quad , \end{aligned}$$

il cui ultimo membro è un invariante, e precisamente l'*invariante primo* dell'omografia vettoriale

$$D\Phi \cdot \delta D \frac{d\mathbf{s}}{dP} - \frac{1}{2} (\mathbf{V}\Phi \wedge) (\delta \boldsymbol{\omega} \wedge) \quad ,$$

dove $\frac{d\mathbf{s}}{dP}$ è l'omografia di deformazione e $D \frac{d\mathbf{s}}{dP}$ la sua dilatazione.

Esplicitando il δW , ed uguagliando i coefficienti delle $\delta \varepsilon_{ij}$ e $\delta \omega_i$ nei due membri, si deduce

$$(I6) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} &= \Phi_{xx} \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} = \Phi_{yy} \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}} = \Phi_{zz} \quad , \\ -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} &= \frac{1}{2} (\Phi_{xy} + \Phi_{yx}) \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} = \frac{1}{2} (\Phi_{yz} + \Phi_{zy}) \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} = \frac{1}{2} (\Phi_{zx} + \Phi_{xz}) \quad , \\ -\frac{\partial W}{\partial \omega_1} &= \frac{1}{2} (\Phi_{yz} - \Phi_{zy}) \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \omega_2} = \frac{1}{2} (\Phi_{zx} - \Phi_{xz}) \quad , \quad -\frac{\partial W}{\partial \omega_3} = \frac{1}{2} (\Phi_{xy} - \Phi_{yx}) \quad , \end{aligned}$$

e reciprocamente

$$(17) \quad \Phi_{xx} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad \Phi_{yy} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}}, \quad \Phi_{zz} = -\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}},$$

$$\Phi_{xy} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_3}\right), \quad \Phi_{yz} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_1}\right), \quad \Phi_{zx} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} + \frac{\partial W}{\partial \omega_2}\right),$$

$$\Phi_{yx} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_3}\right), \quad \Phi_{zy} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_1}\right), \quad \Phi_{xz} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} - \frac{\partial W}{\partial \omega_2}\right).$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] VOIGT, *Theoretische Studien über die Elasticität sverhältnisse der Krystalle*, « Abhand. K. Ges. », Göttingen, 1887.
- [2] LARMOR, *The Equations of Propagation of Disturbances in Girostatically Loaded Media and of the Circular Polarization of Light*, « Proc. London Math. Soc. », 1891.
- [3] LORD KELVIN, « Baltimore Lectures », London 1904 (Lecture XX).
- [4] COMBIEBAC, *Sur les équations générales de l'élasticité*, « Bulletin de la Soc. Math. de France », t. XXX, 1902.
- [5] C. SOMIGLIANA, *Sopra un'estensione della teoria della elasticità*, « Rend. Accad. Lincei », vol. 19, 1910.
- [6] C. SOMIGLIANA, *Sul potenziale elastico*, « Annali di Matematica », vol. 7, 1901.
- [7] G. GRIOLI, *Elasticità asimmetrica*, « Annali Matem. Pura, e Applicata », Serie IV, 50, 1960.
- [8] C. BURALI FORTI e R. MARROLONGO, *Analisi Vettoriale Generale*, Cap. I, § 1, nn. 7, 8, 9, 10. Zanichelli, Bologna, 1929.
- [9] J. W. DUNKIN e A. C. ERINGEN, *On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid*, « International Journal of Engineering Science », Vol. I, n. 4, Dec. 1963.
- [10] C. AGOSTINELLI, *Istituzioni di Fisica Matematica*, P. III, Cap. III, § 8, Zanichelli, Bologna, 1962.
- [11] C. AGOSTINELLI, *Magnetofluidodinamica*, Cap. VI, § 1, n. 1. Edizioni Cremonese, Roma, 1966.
- [12] C. AGOSTINELLI, *Sulla dinamica dei corpi elastici omogenei isotropi, elettricamente conduttori, soggetti a un campo magnetico*. In corso di stampa nella Rivista « Meccanica » della A.I.M.E.T.A.