Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Caligo

Moltiplicatori critici λ_{cr}, desunti per via energetica, della pressione p_0 sul manto e dello sforzo assiale totale N_0 in un tubo cilindrico circolare. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 332–337.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_332_0>

Meccanica. — *Moltiplicatori critici λ_{cr}, desunti per via energetica, della pressione p_0 sul manto e dello sforzo assiale totale N_0 in un tubo cilindrico circolare.* Nota I di DOMENICO CALIGO presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — The author computes the critical multipliers λ_{cr} of the uniform lateral pressure p_0 and of the total axial pressure N_0 on a circular cylindrical tube by means of the energy method.

Account is taken of the non invariant deducibility of the elastic potential, according to G. Ferrarese [1] (1).

In fact there are two possible expressions of the elastic potential, one of which coincides with the classical one by Love [7]. Here the influence of the two different deductions on the expression of λ_{cr} is considered.

1. Lo studio della stabilità in Elastostatica ha condotto molti Autori (2) ad occuparsi della valutazione dei carichi critici sotto i quali l'equilibrio di un tubo circolare cilindrico sottile diviene instabile.

Torniamo qui a studiare questo argomento, per trattarlo secondo la impostazione fondata sul principio di Dirichlet ([5], Nota III) e per tenere conto di due diverse espressioni del potenziale elastico in conformità a recenti deduzioni di G. Ferrarese ([1], [2]). Anche l'espressione del principio del Dirichlet va intesa con qualche riserva concettuale poiché ancora non si sa dare una espressione del potenziale elastico unitario per una Elasticità di secondo grado [4].

Le equazioni per le configurazioni critiche sono ricavate come *equazioni alle variazioni* delle equazioni generali dell'equilibrio e non attraverso il principio energetico $\delta W - \lambda\ \delta \mathfrak{L}_2 = 0$, di Bryan–Timoshenko ([9], pp. 82–94, 457), per il quale si determinano i carichi critici annullando l'incremento di energia potenziale totale, dovuto ad una classe, non del tutto arbitraria però, di spostamenti u, v, w dei punti del corpo elastico dalla configurazione di equilibrio. Questo principio non è sempre sufficiente (tipico il caso degli archi e degli anelli con pressione uniforme cfr. [4]) a dare i risultati ottenuti con il principio variazionale

$$\delta\,[W + \lambda\,(\mathfrak{L}_2^* - \mathfrak{L}_2)] = 0, \tag{1}$$

al quale si è in certo senso, cfr. [4], condotti dal principio di Dirichlet, ampiamente illustrato in [5] (3). I risultati della nostra ricerca (come si è detto)

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) I riferimenti bibliografici sono riportati alla fine.

(2) Ricordiamo, per esempio: A. u. L. Föppl, W. Flügge, G. Krall, A. E. H. Love, R. von Mises, S. Timoshenko, F. Tölke.

(3) Attraverso la scrittura diretta, tutt'altro che facile e attuabile solo attraverso intuizioni specifiche di pochi, primissimo fra tutti S. Timoskenko.

sono ricavati direttamente dalla applicazione del principio (1); ci siamo trattenuti su questa questione anche per analizzare l'influenza, sulla valutazione del moltiplicatore critico λ_{cr}, di due diverse espressioni della energia potenziale W.

Infatti la deduzione di W non è invariante, ma dipende dalla scelta di una delle due espressioni delle caratteristiche $\varkappa$ della deformazione flessionale, le quali (e più precisamente la componente $\varkappa_{12}^{(1)}$) sono diverse in relazione alla scelta alternativa fra due differenti terne mobili ortogonali di riferimento sulla superficie Ω' deformata della superficie assegnata Ω, come ha rigorosamente dimostrato per primo G. Ferrarese nelle Note sopra citate.

2. Siano.

$$u = u(x, \psi) \quad , \quad v = v(x, \psi) \quad , \quad w = w(x, \psi) \tag{2}$$

le *componenti dello spostamento* in direzione e verso rispettivamente di x, di ψ e della normale interna alla superficie mediana Ω della volta (terna sinistra); a, il raggio di curvatura; L, la lunghezza; h lo spessore ([5], n. 2).

Si suppone *h piccolo rispetto ad* L *e ad a* (cfr. (20) e Nota II); si pone

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\ )' \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \psi} = (\ )^{\cdot} ; \tag{3}$$

con ν ed E si indicano, come al solito, il modulo di Poisson e il modulo di Young.

Per la via ordinaria, con l'espressione delle caratteristiche di deformazione conforme al Love ([7], p. 543 e [5], n. 7) si ottiene

$$W = W_f + W_e \tag{4}$$

con W_f potenziale elastico flessionale della superficie Ω, dato da

$$(5)_a \quad W_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_\Omega \left\{ \left[w'' + \frac{\ddot{w}+\dot{v}}{a^2} \right]^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\dot{w}'+v'}{a} \right)^2 - w'' \frac{\ddot{w}+\dot{v}}{a^2} \right] \right\} d\Omega ,$$

e W_e potenziale elastico estensionale della superficie Ω, dato da

$$W_e = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_\Omega \left\{ \left[u' + \frac{\dot{v}-w}{a} \right]^2 + \frac{1-\nu}{2} \left[\left(\frac{\dot{u}}{a} + v' \right)^2 - 4u' \frac{\dot{v}-w}{a} \right] \right\} d\Omega . \tag{6}$$

Lo sforzo di componenti

$$T_1 \equiv N_x = -\frac{N_0}{2\pi a} \quad , \quad T_2 \equiv N_y = -p_0 a \quad , \quad S = 0 \tag{7}$$ [4]

(4) Per la pressione sui fondi è $N_0 = \pi a^2 \cdot p_0$, con che

$$N_x = -\pi a^2 p_0/(2\pi a) = -p_0 a/2 = N_y/2 .$$

fa il lavoro ([5], (14)):

$$\mathfrak{L}_2^* = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ \frac{N_0}{2\pi a}[w'^2 + v'^2] + p_0 \frac{\dot{u}^2 + [\dot{w} + v]^2}{a} \right\} d\Omega\,; \tag{8}$$

il lavoro fatto dai carichi esterni, aventi il carattere di pressione idrostatica, è

$$\mathfrak{L}_2 = -\frac{1}{2a}\, p_0 \int_\Omega \{ v\dot{w} - \dot{v}w + w^2 + v^2 + a(uw' - wu') \} d\Omega\,. \tag{9}$$

Per arbitrarie piccole variazioni δu, δv, δw degli spostamenti u, v, w si applica il principio (1) dal quale si deduce il sistema di equazioni differenziali euleriane $(12)_\alpha$, al quale è utile far precedere le posizioni

$$K^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{h}{a}\right)^2, \tag{10}$$

$$\Phi_1 = \frac{1-\nu^2}{Eh}\, p_0\, a \quad , \quad \Phi_2 = \frac{1-\nu^2}{Eh}\,\frac{N_0}{2\pi a} \tag{11}$$

collegate alle (7) [5]. Il sistema differenziale è

$$(12)_\alpha \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 u'' + \left(\frac{1-\nu}{2} - \lambda\Phi_1\right)\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2} a\dot{v}' - (\nu + \lambda\Phi_1)\, a w' = 0\,, \\ & \frac{1+\nu}{2} a\dot{u}' + \left[\frac{1-\nu}{2}(1 + 4K^2) - \lambda\Phi_2\right] a^2 v'' + (1 + K^2)\,\ddot{v} \\ & \qquad\qquad + (2-\nu)\, K^2 a^2 \dot{w}'' + K^2 \dddot{w} - \dot{w} = 0\,, \\ & \nu a u' + \dot{v} - w - K^2 [(2-\nu)\, a^2 \dot{v}'' + \dddot{v} + (a^4 w^{\text{IV}} + 2a^2 \ddot{w}'' + \ddddot{w})] \\ & \qquad\qquad + [a u' - (\ddot{w} + w)]\,\lambda\Phi_1 - a^2 w''\,\lambda\Phi_2 = 0\,. \end{aligned} \right.$$

Tenendo conto dell'alternativa, posta in luce dal Ferrarese, la $(5)_\alpha$ diviene

$$(5)_\beta \quad W_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_\Omega \left\{ \left| w'' + \frac{\ddot{w} + \dot{v}}{a^2} \right|^2 + 2(1-\nu)\left[\left(\frac{\dot{w}'}{a} - \frac{\dot{u}}{a^2}\right)^2 - w''\,\frac{\ddot{w} + \dot{v}}{a^2}\right] \right\} d\Omega\,;$$

mentre W_e, $\mathfrak{L}_2^*$ ed $\mathfrak{L}_2$ mantengono le espressioni (6), (8) e (9).

In base a queste si ottiene, in luogo di $(12)_\alpha$, il sistema differenziale

$$(12)_\beta \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 u'' + \left[\frac{1-\nu}{2}(1 + 4K^2) - \lambda\Phi_1\right]\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2} a\dot{v}' - 2K^2(1-\nu)\, a\ddot{w}' \\ & \qquad\qquad - (\nu + \lambda\Phi_1)\, a w' = 0\,, \\ & \frac{1+\nu}{2} a\dot{u}' + \left(\frac{1-\nu}{2} - \lambda\Phi_2\right) a^2 v'' + (1 + K^2)\,\ddot{v} + \nu K^2 a^2 \dot{w}'' + K^2 \dddot{w} - \dot{w} = 0\,, \\ & \nu a u' + \dot{v} - w - K^2[-2(1-\nu)\, a\ddot{u}' + \nu a^2 \dot{v}'' + \dddot{v} + (a^4 w^{\text{IV}} + 2a^2 \ddot{w}'' + \ddddot{w})] \\ & \qquad\qquad + [a u' - (\ddot{w} + w)]\,\lambda\Phi_1 - a^2 w''\,\lambda\Phi_2 = 0\,. \end{aligned} \right.$$

(5) La scelta degli indici 1 e 2 non è coerente con l'ufficio degli stessi indici nelle (7) però è conveniente per il confronto con l'art. 11.10 di [9].

3. Si sceglie una opportuna terna di funzioni (2), tale da soddisfare le condizioni di volta semplicemente timpanata, tali cioè che $w = 0$, $w'' = 0$ agli estremi $x = -L/2$, $x = L/2$. Una tale terna può essere la

$$(13) \qquad \begin{cases} u = \mathcal{A} \ \mathrm{sen}\, n\psi \quad \mathrm{sen}\, m\pi x/L\,, \\ v = \mathcal{B} \ \cos n\psi \quad \cos m\pi x/L\,, \\ w = \mathcal{C} \ \mathrm{sen}\, n\psi \quad \cos m\pi x/L\,, \end{cases}$$

con

(14) $\quad |x/L| \leq 1/2$, $|\psi| \leq \pi/2$, *n intero positivo* , *m dispari.*

I coefficienti $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ hanno le dimensioni di una lunghezza; qui non interessa arrivare alla loro determinazione, bensì dedurre il sistema lineare omogeneo in $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, dal quale si potrà procedere al calcolo degli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ annullando il determinante.

Per economia di scrittura e per opportunità di confronto fra i risultati delle diverse impostazioni adottiamo la seguente convenzione: indichiamo con α la scelta della terna di riferimento sulla trasformata Ω' di Ω, mediante la quale si deduce W dalle caratteristiche di deformazione del Love, si ottengono cioè $(5)_\alpha$ e (6); indichiamo con β l'altra scelta, con la quale si sono ottenute $(5)_\beta$ e (6) [(6)]. Inoltre siano

$$(15) \qquad \delta^\gamma_\eta = \begin{cases} 1 \ , & \text{se } \gamma = \eta\,, \\ 0 \ , & \text{se } \gamma \neq \eta\,, \end{cases}$$

$$(16) \qquad \mu = m\pi \frac{a}{L}\,; \qquad (m = 1, 3, 5, \cdots).$$

Introdotta la terna (13) nelle equazioni (12) si ottiene il sistema algebrico:

$$(17) \qquad \begin{cases} \left\{\mu^2 + \left[\dfrac{1-\nu}{2}(1 + 4K^2 \delta^\gamma_\beta) - (\delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta)\lambda\Phi_1\right] n^2\right\} \mathcal{A} \\ \qquad - \left\{\dfrac{1+\nu}{2} + (1 - \delta^\gamma_\alpha - \delta^\gamma_\beta)\lambda\Phi_1\right\} \mu n \mathcal{B} - \{\nu + \lambda\Phi_1 - 2K^2(1-\nu) n^2 \delta^\gamma_\beta\} \mu \mathcal{C} = 0, \\ -\dfrac{1+\nu}{2}\mu n \mathcal{A} + \left\{\left[\dfrac{1-\nu}{2}(1 + 2K^2(1 + \delta^\gamma_\alpha - \delta^\gamma_\beta)) - \lambda\Phi_2\right]\mu^2 + (1+K^2) n^2\right\} \mathcal{B} \\ \qquad + \{1 + K^2[(1 + (1-\nu)(\delta^\gamma_\alpha - \delta^\gamma_\beta))\mu^2 + n^2]\} n \mathcal{C} = 0, \\ -\{\nu + (\delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta)\lambda\Phi_1 - 2K^2(1-\nu)\delta^\gamma_\beta n^2\} \mu \mathcal{A} \\ \qquad + \{1 + K^2[(2 - \nu - 2(1-\nu)\delta^\gamma_\beta)\mu^2 + n^2]\} n \mathcal{B} \\ \qquad + \{1 + K^2(\mu^2 + n^2)^2 - (n^2 - 1)\lambda\Phi_1 - \mu^2\lambda\Phi_2\} \mathcal{C} = 0. \end{cases}$$

(6) Questa convenzione è già stata adottata in [6], p. 279; essa dà ragione degli indici α o β apposti alle formule (5) e (12).

In questo sistema (17) sono compendiati i risultati nuovi e quelli già noti; se vi si pone $\gamma = \alpha$ si ottiene il sistema deducibile col riferimento α; se vi si pone $\gamma = \beta$ si ottiene quello per il riferimento β (7). Se si pone $\gamma \neq \alpha$ e $\gamma \neq \beta$, tenendo presenti le posizioni fatte prima, si ottengono i risultati riportati da Timoshenko e Gere in [9], Articoli 11–3, 11–5 e 11–10.

4. Da (17) segue l'*equazione di compatibilità*, ossia dei moltiplicatori critici; delle sue soluzioni positive interessa la minore, che si indica con λ_{cr} (cfr. [5], § 2). Tale equazione, di terzo grado in λ, si può scrivere concisamente

$$(18) \qquad \Gamma_{0,0} + [\Gamma_{1,0}\,\Phi_1 + \Gamma_{0,1}\,\Phi_2]\,\lambda + [\Gamma_{2,0}\,\Phi_1^2 + \Gamma_{1,1}\,\Phi_1\,\Phi_2 + \Gamma_{0,2}\,\Phi_2^2]\,\lambda^2 + [\Gamma_{2,1}\,\Phi_1^2\,\Phi_2 + \Gamma_{1,2}\,\Phi_1\,\Phi_2^2]\,\lambda^3 = 0$$

essendo i coefficienti $\Gamma_{h,k}$ polinomi in K^2:

$$(19) \qquad \Gamma_{h,k} = \sum_{j=0}^{j=3-(h+k)} \Gamma_{h,k}^{(j)}\,(K^2)^j$$

ed i $\Gamma_{h,k}^{(j)}$ funzioni di μ e di n, fissato ν, delle quali si calcolano facilmente le espressioni, che riporteremo in una Nota II insieme alla discussione della (18).

Qui ci limitiamo ad osservare che, assunto γ diverso da α o da β, si ritrovano i risultati di Timoshenko [9] e formalmente anche i risultati del Flügge, il quale ha però studiato in [3]. (pp. 232–233) sistemi leggermente diversi dai nostri (12) e (17).

Assumeremo per K^2 la limitazione, rispondente a casi pratici,

$$(20) \qquad 10^{-6} \leq 3\,K^2 \leq 10^{-4},$$

La (20) autorizza la considerazione di una forma semplificata dell'equazione (18), privata dei termini per i quali risulta $h + k + j \geq 2$, e pertanto ridotta lineare in λ (cfr. [3], (211); [9], pp. 464, 478, 496).

Da queste forme ridotte della (18) abbiamo ricavato, fra l'altro, le seguenti formule che si prestano ad un immediato diretto confronto con le analoghe formule di [3] e di [9]. Posto.

$$(21) \qquad N = 1 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2,$$

$$(22) \qquad \Phi^0 = (1 - \nu^2)\,\frac{1}{n^2 - 1}\,\frac{1}{N^2} + K^2 \left\{ n^2 - 1 + \frac{2(n^2 - 1) + (1 - \nu)\,[1 - (\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma)]}{N} + \frac{7(1 - \nu^2)\,\delta_\beta^\gamma - (2 + \delta_\alpha^\gamma)}{N^2} + \frac{\mu^4}{n^2 - 1}\left(3 - \frac{2}{N}\right) \right\},$$

(7) Si osservi che, in ciascuno di questi due casi, il sistema (17) conserva la naturale simmetria del problema.

si trova:

1) in presenza di uno sforzo assiale uniforme e in assenza di pressione sul manto ($p_0 = 0$, cioè $\Phi_1 = 0$; cfr. [9], Art. 11.3 (i)):

$$\lambda \Phi_2 = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1 + 2\nu} (N - 1) \Phi^0 , \tag{23}$$

$$\lambda_{cr} \frac{N_0}{2\pi a} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \cdot \min_{\substack{n=2,3,\ldots \\ m=1,3,\ldots}} \left\{ \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1 + 2\nu} (N - 1) \Phi^0 \right\} ;$$

2) in presenza di una pressione p_0 sul manto e in assenza di sforzo assiale ($N_0 = 0$, cioè $\Phi_2 = 0$; cfr. [4], p. 69; [8], p. 750; [9], (11-12)):

$$\lambda_{cr} p_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \min_{\substack{n=2,3,\ldots \\ m=1,3,\ldots}} \left\{ \frac{1}{1 + \nu \dfrac{1 + \delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma}{(n^2 - 1) N^2}} \frac{h}{a} \Phi^0 \right\} ; \tag{24}$$

3) per un rapporto costante Φ^* fra N_x ed N_y (cfr. (4) e [9], (11-25)):

$$\lambda_{cr} p_0 = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h}{a} \min_{\substack{n=2,3,\ldots \\ m=1,3,\ldots}} \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + \Phi^* \mu^2} \Phi^0 \right] . \tag{25}$$

Nella Nota II riporteremo alcune tabellazioni per le (23), (24) e (25).
Già da queste formule si vede che le tre diverse impostazioni danno risultati numerici senza rilevanti diversità. Si può inoltre anticipare che per i tubi considerati da V. Mises ([4], p. 69) lo sforzo assiale critico si ha per $n = 2$ e la pressione critica sul manto per $m = 1$. Nel caso del tubo indefinito ($L \to \infty$, $\mu \to 0$, $N \to \infty$) la (23) richiede alcune precisazioni, mentre la (24) si realizza per $m = 1$, $n = 2$.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] G. FERRARESE, *Sulle caratteristiche di deformazione di una barra curva*, questi « Rend. », s. VIII, *34*, 628-635.

[2] G. FERRARESE, *Sulle deformazioni finite di una volta*, questi « Rend. », s.VIII, *36*, 340-346, 467-474, 825-831.

[3] W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Berlino (1962).

[4] G. KRALL, *Osservazioni sui principi variazionali per la stabilità in Elastostatica e loro applicazioni*. « Memorie » della Acc. Naz. Lincei, s. VIII, *8*, sez. 1ª, 53-84.

[5] G. KRALL e D. CALIGO, *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*, questi « Rend. », s. VIII, *30*, 131-139, 315-322, 421-428, 608-617, *31*, 9-16.

[6] G. KRALL e D. CALIGO, *Stati tensoflessionali nelle volte e λ_{cr} critici corrispondenti*, questi « Rend. », s. VIII, *36*, 277-280.

[7] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge (1952).

[8] R. VON MISES, *Der kritische Aussendruck zylindischer Rohre*, « Z. d. V. d. I. ». Bd. 58 (1914).

[9] S. TIMOSHENKO e J. GERE, *Theory of Elastic Stability*. N.Y. (1961).