Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Umberto Bartocci

Una nuova classe di ovali proiettive finite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 312–316.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_312_0>

Matematica. — *Una nuova classe di ovali proiettive finite* (*). Nota di UMBERTO BARTOCCI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — In this work a new class of non desarguesian ovals of order $q = p^h$ is given, where p is any prime number and h denotes any natural number greater than 1. Moreover, it is shown that these ovals are not included in Ostrom's classification.

1. Si dice *ovale proiettiva* di un piano grafico π di ordine q un insieme costituito da $q + 1$ punti del piano, a tre a tre non allineati (cfr. ad esempio, B. Segre [13] (1), F. Buekenhout [1]); l'intero q è l'ordine di una tale ovale.

Se π è un piano desarguesiano di caratteristica dispari, il problema della determinazione di tutte le ovali di π è completamente risolto da un teorema di B. Segre (cfr. B. Segre [13], [14]): ogni ovale di π risulta costituita dai punti di una conica. Se π è invece un piano non desarguesiano di ordine dispari, il problema della determinazione delle ovali è tuttora aperto (come, del resto, se l'ordine q è pari, per i piani desarguesiani e non) ed ha interesse anche la ricerca di esempi concreti, poiché sono relativamente pochi i tipi noti di ovali finite (di ordine dispari) giacenti in un piano non desarguesiano. Più precisamente, oltre ad ovali in piani non desarguesiani di ordine 9 (cfr. G. Rodriguez [12], D. R. Hughes [3]), l'unico esempio a nostra conoscenza di ovali non desarguesiane di ordine dispari è quello delle ovali di Wagner (cfr. A. Wagner [15]), costruite su piani ottenuti a partire da quasi-corpi commutativi propri.

In questo Lavoro costruisco una classe di ovali, non desarguesiane, di ordine $q = p^h$ (p numero naturale dispari, h intero maggiore di 1). Stabilisco, inoltre, che le ovali ottenute non rientrano nelle classi segnalate, in [8], da T. G. Ostrom, ciò che permette di concludere che le ovali di Wagner, che risultano delle quasi-coniche secondo Ostrom, sono non isomorfe a quelle ottenute nella presente Nota.

Si aggiunga che, a differenza di queste ultime, per le ovali di Wagner l'ordine non risulta arbitrario, nel senso che non esiste una di tali ovali in corrispondenza ad ogni ordine $q = p^h$ (con le notazioni precedenti) (cfr. D. R. Hughes [4]).

2. Dedichiamo questo numero ad ulteriori richiami.

Indicata con $\mathcal{O}$ un'ovale proiettiva di un piano grafico π di ordine q, *supporremo sempre*, nel seguito, *che l'intero q sia dispari*. È noto, e d'immediata

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) I numeri tra [ ] rinviano alla bibliografia posta alla fine del Lavoro.

dimostrazione, che per ogni punto di $\mathcal{O}$ passa una ed una sola *tangente* all'ovale (ossia, una ed una sola retta di π che incontra l'ovale in un sol punto) e che per i punti di π non appartenenti all'ovale passano due tangenti all'ovale oppure nessuna; tra questi ultimi punti, quelli del primo tipo diconsi esterni e quelli del secondo tipo interni all'ovale (il loro numero è $q(q+1)/2$ e $q(q-1)/2$ rispettivamente).

La *polarità parziale* rispetto ad $\mathcal{O}$ è definita come segue: essa associa ad ogni punto P di π esterno ad $\mathcal{O}$ la retta congiungente i punti $A, B \in \mathcal{O}$ tali che le rette PA (retta congiungente P con A) e PB siano tangenti ad $\mathcal{O}$; definiamo $r_P = AB$. Premesso ciò, diremo che l'ovale è *semi-armonica* se e solo se le condizioni $P' \in r_P$ e $P \in r_{P'}$ sono ciascuna conseguenza dell'altra, non appena P e P' sono punti di π esterni ad $\mathcal{O}$.

Dato un punto P di π non appartenente all'ovale, si dice *involuzione* individuata da quel punto la sostituzione sui $q+1$ punti di $\mathcal{O}$ che a $Q \in \mathcal{O}$ associa il punto $Q' \in \mathcal{O}$ così definito: $Q' = Q$ se la retta PQ è tangente, mentre, se PQ è secante $\mathcal{O}$, Q' è l'intersezione residua della retta PQ con $\mathcal{O}$. Si dice, poi, che due ovali proiettive $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ sono *isomorfe* se è possibile definire tra esse una corrispondenza biunivoca f che verifichi la proprietà seguente:

a) se ω è una qualsiasi involuzione su $\mathcal{O}$, esiste un'involuzione ω' su $\mathcal{O}'$ tale che $f(\omega(X)) = \omega'(f(X))$, per ogni $X \in \mathcal{O}$.

Si dicono, infine, *coniche* le ovali proiettive che sono isomorfe alle coniche di un piano di Pappo–Pascal.

Poiché la semi–armonicità ovviamente si mantiene per isomorfismi ed ogni conica è un'ovale semi–armonica, ne risulta senz'altro il

LEMMA 1. – *Un'ovale proiettiva che non sia semi–armonica non è una conica.*

Per concludere i richiami cui questo numero è dedicato, ricordiamo, ancora, la costruzione dei *piani di Moulton–Pierce* (cfr., ad esempio, W. A. Pierce [9], [10], [11]; F. Fontana [2]).

A partire dal campo di Galois di ordine $q = p^h$ (p primo dispari, h intero maggiore di 1), che indicheremo con γ_q, e da un suo automorfismo proprio φ, si assumono come punti del piano affine di Moulton–Pierce di ordine q i punti (x, y) del piano lineare affine su γ_q, e come rette i luoghi dei punti (x, y) soddisfacenti a condizioni del tipo $x = c$, $c \in \gamma_q$, ovvero

$$\begin{cases} y = mx + b & \text{se } x \text{ è quadrato in } \gamma_q, \\ y = m^{\varphi} \cdot x + b & \text{se } x \text{ non è quadrato in } \gamma_q. \end{cases}$$

Indicheremo con $\mathfrak{M}_{\varphi}(q)$ e diremo piano di Moulton–Pierce di ordine q relativo all'automorfismo φ, il piano proiettivo ottenuto come completamento del piano affine così definito.

3. Otterremo i risultati annunciati nel n. 1 usufruendo del piano di Moulton–Pierce precedentemente introdotto. All'uopo stabiliamo dapprima altri cinque Lemmi.

LEMMA 2. – *Ogni piano di Moulton–Pierce ammette delle ovali.*

Dimostrazione. – Si consideri nel piano lineare affine su γ_q la conica di equazione $x = \mu y^2$, $\mu \neq 0$. È evidente che i punti di detta conica assieme al punto all'infinito dell'asse delle x costituiscono un'ovale nel piano $\mathfrak{M}_\varphi(q)$; infatti un tale luogo non ammette delle rette trisecanti, in quanto tutti i suoi punti al finito hanno ascissa quadrata o non quadrata, rispettivamente se μ è quadrato o non quadrato in γ_q.

Se l'automorfismo φ di γ_q è quello che porta $x \in \gamma_q$ in x^{p^k} indicheremo l'ovale di $\mathfrak{M}_\varphi(q)$, di cui al precedente Lemma, con $\mathcal{C}^\mu_{k,q}$. Indicheremo altresì con $c(\varphi)$ il sottocampo (proprio) di γ_q costituito dagli elementi fissi nell'automorfismo φ, con $(c(\varphi), \xi)$, se $\xi \in \gamma_q$, il sottocampo di γ_q generato da $c(\varphi)$ e da ξ, con ξ^∞ il punto all'infinito dell'asse delle x, ed infine con $[m, m^\varphi]$ il punto improprio in $\mathfrak{M}_\varphi(q)$ della retta $\{y = mx + b, y = m^\varphi x + b\}$, dicendo m il *coefficiente angolare* della retta in questione.

Proviamo ora il

LEMMA 3. $\mathcal{C}^1_{k,q}$ *è un'ovale non semi–armonica.*

Dimostrazione. – Cominciamo col provare che esiste certamente in γ_q qualche elemento ξ tale che $\xi \notin c(\varphi)$ e $2\xi - 1$ non sia un quadrato in γ_q. Basta osservare che, considerati i $(q-1)/2$ elementi non quadrati di γ_q e scritti questi nella forma $2\xi - 1$, a qualche $\xi \notin c(\varphi)$ deve corrispondere un $2\xi - 1$ non quadrato in quanto $(q-1)/2 > p^k$.

Ciò fatto, si consideri un punto $A \equiv (\xi^2, \xi)$ di $\mathcal{C}^1_{k,q}$, con $\xi \notin c(\varphi)$ e $2\xi - 1$ non quadrato. La tangente in A a $\mathcal{C}^1_{k,q}$, t_A, risulta deviata nel passaggio dal luogo dei punti ad ascissa quadrata a quello dei punti ad ascissa non quadrata poiché il suo coefficiente angolare m non è fisso in φ $\left(\text{infatti } m = \frac{1}{2\xi} \notin c(\varphi)\right)$. Il *polo* della secante $A\xi^\infty$ è dunque il punto $P^\infty = [m, m^\varphi]$, vale a dire che la polare di P^∞ è proprio quella secante.

Supponiamo ora per assurdo l'ovale semi–armonica e consideriamo la secante s per P^∞ e per il punto $Q \equiv (1, 1)$ (poiché risulta che la tangente t_Q ha equazione $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, e questa retta non contiene P^∞, è chiaro che QP^∞ è di fatto una secante di $\mathcal{C}$); in virtù dell'ipotesi ammessa dovrà essere, per il polo P di s, $P \in A\xi^\infty$. Quindi, se $QP^\infty \cap \mathcal{C}^1_{k,q} = \{Q, R\}$, $Q \neq R$, dovrà risultare $P = t_Q \cap t_R \in A\xi^\infty$; d'onde $t_Q \cap A\xi^\infty \in t_R$, cioè $(2\xi - 1, \xi) \in t_R$. Notiamo ora che, essendo t_Q una delle rette non deviate, al pari della $A\xi^\infty$, il punto $(2\xi - 1, \xi)$ sta sulla tangente in R alla conica $x = y^2$ del piano lineare affine su γ_q; allora, poiché questa tangente ha un coefficiente angolare che, come vedremo, non sta in $c(\varphi)$, e $2\xi - 1$ non è quadrato in γ_q, si è raggiunto l'assurdo, non potendo $(2\xi - 1, \xi)$ essere situato su t_R in quanto questa è una retta deviata.

Proviamo per finire che il coefficiente angolare di t_R non sta in $c(\varphi)$; esso vale infatti $1/2y_0$, se $R = (y_0^2, y_0)$, e non può essere $y_0 \in c(\varphi)$ in quanto altrimenti la retta $QR = QP^\infty$ sarebbe di quelle non deviate, contro quanto inizialmente supposto.

La discussione circa la non semi–armonicità di $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ può venire estesa agli altri valori di μ. Vale al riguardo il

LEMMA 4. – *Se* μ *è quadrato in* γ_q *e* $(c(\varphi), \mu)$ *è un sottocampo proprio di* γ_q, $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ *è un'ovale non semi–armonica.*

Dimostrazione. – Si parta da un punto $A \equiv (\mu\xi^2, \xi)$ con $\xi \notin (c(\varphi), \mu)$ e con $2\mu\xi - 1$ non quadrato in γ_q (si ragiona come nel precedente Lemma per stabilire l'esistenza di un tale ξ). Risulta allora che il coefficiente angolare m di t_A non appartiene a $c(\varphi)$, in quanto $m = \dfrac{1}{2\mu\xi} \notin (c(\varphi), \mu)$. Considerato quindi su $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ il punto $Q \equiv \left(\dfrac{1}{\mu}, \dfrac{1}{\mu}\right)$, è chiaro che t_Q: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$, di guisa che $t_Q \cap A\xi^{\infty} = (2\mu\xi - 1, \xi)$.

Basta ormai ripetere un ragionamento analogo a quello dato nella dimostrazione del precedente Lemma per ottenere un assurdo dall'ipotesi che $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ sia semi–armonica, introducendo il punto $R \in \mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ tale che $QR = QP^{\infty}$ ed inoltre supponendo che $t_R \cap t_Q \in A\xi^{\infty}$ ossia $t_R \ni t_Q \cap A\xi^{\infty}$.

Del tutto analogamente, e perciò ne omettiamo la dimostrazione, si prova il

LEMMA 5. – *Se* μ *non è quadrato in* γ_q *e* $(c(\varphi), \mu)$ *è un sottocampo proprio di* γ_q, $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ *è un'ovale non semi–armonica.*

Proveremo da ultimo il

LEMMA 6. – *Se* s *è un generatore di* γ_q, $\mathcal{C}^{s}_{k,q}$ *è un'ovale non semi–armonica.*

Dimostrazione. – Basta notare che s non è di certo quadrato in γ_q, e quindi procedere come nella dimostrazione del Lemma 4, a partire da un punto $A = (s\xi^2, \xi)$ tale che risulti $s\xi \notin c(\varphi)$ e $2s\xi - 1$ quadrato in γ_q (per stabilire l'esistenza di un tale ξ in γ_q si ragioni al solito modo). Ora c'è da notare che, introdotto come dianzi il punto R, t_R viene effettivamente deviata; infatti se $\varphi^{-1}(m) \notin c(\varphi)$ è il coefficiente angolare di t_A, il coefficiente angolare di t_R è dato da

$$\frac{1}{2}\left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi^{-1}(m)} - 1\right)^{-1} \notin c(\varphi).$$

Dal complesso dei precedenti Lemmi consegue il

TEOREMA. – *Per ogni intero* $q = p^h$ *(*p *primo dispari,* h *intero maggiore di* 1*) esistono nel piano di Moulton–Pierce* $\mathfrak{M}_{\varphi}(q)$ *ovali non semi–armoniche.*

Questo teorema porge dunque quanto annunciato nel n. 1; infatti le ovali $\mathcal{C}^{\mu}_{k,q}$ (che non sono delle coniche, stante il Lemma 1) non appartengono a nessuna delle classi indicate da T. G. Ostrom, ciascuna delle quali consta di ovali semi–armoniche (cfr. T. G. Ostrom [8]).

4. Concludiamo questa Nota con un'osservazione: non ogni conica del piano proiettivo su γ_q, interpretata in $\mathfrak{M}_{\varphi}(q)$, fornisce ivi un'ovale. Ad esempio, considerata l'iperbole $xy = 1$ nel piano lineare affine su γ_9 ed il ramo di tale iperbole contenuto nel semi–piano dei punti di ascissa quadrata con

l'aggiunta dei due punti all'infinito dell'iperbole, si ha che addirittura nessuna ovale di $\mathfrak{M}_\varphi(q)$ contiene tali 6 punti (i quali in $\mathfrak{M}_\varphi(q)$ costituiscono tuttavia un 6-arco, vale a dire un insieme di 6 punti a tre a tre non allineati). Più precisamente, un siffatto 6-arco risulta contenuto in quattro 7-archi non completi, ciascuno dei quali si completa in due modi distinti in un 8-arco; gli 8-archi completi che così si ottengono risultano complessivamente in numero di quattro, in quanto ciascuno di essi proviene da due diversi di quei 7-archi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BUEKENHOUT F., *Etude intrinsèque des ovales*, « Rend. Mat. e Appl. », Roma, Serie V, vol. XXV (1966).

[2] FONTANA F., *Piani di Moulton generalizzati*, « Rend. Mat. e Appl. », Roma, Serie V, vol. XXVI (1967).

[3] HUGHES D. R., *A class of non desarguesian projective planes*, « Canad. J. Math. », 9 (1957).

[4] HUGHES D. R., *Review of some results in collineation groups*, « Proc. Symp. Pure Math. Ann. Math. Soc. », 1959.

[5] LOMBARDO RADICE L., *I piani di rifrazione*, « Rend. Mat. e Appl., Roma », Serie V, vol. XIII (1954).

[6] LOMBARDO RADICE L., *Piani grafici finiti non desarguesiani*, in inglese come appendice a B. Segre [13].

[7] LOMBARDO RADICE L., *Costruzione di piani non arguesiani a partire da piani di Galois*, Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari, 107 (1966).

[8] OSTROM T. G., *Ovals, dualities and Desargues's theorem*, « Canad. J. Math », 7 (1955).

[9] PIERCE W. A., *Moulton planes*, « Canad. J. Math », *13* (1961).

[10] PIERCE W. A., *Collineations of affine Moulton planes*, « Canad. J. Math. », *16* (1964).

[11] PIERCE W. A., *Collineations of projective Moulton planes*, « Canad. J. Math », *16* (1964).

[12] RODRIGUEZ G., *Un esempio di ovale che non è una quasi-conica*, « Boll. Un. Mat. Ital. », *14* (1959).

[13] SEGRE B., *Lectures on modern geometry* (with an appendix of Lucio Lombardo Radice), Ed. Cremonese, Roma 1961.

[14] SEGRE B., *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math », 7 (1955).

[15] WAGNER A., *On perspectivities of finite projective planes*, « Math. Zeitschrift », *71* (1959).