ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

BRUNO PINI

**Una osservazione sulla natura delle soluzioni delle
equazioni quasi-ellittiche in un semispazio**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.5, p. 307–311.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_307_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Una osservazione sulla natura delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche in un semispazio.* Nota di BRUNO PINI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Let $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u = 0$ be a quasi-elliptic partial differential equation with constant coefficients. Let $f_j(x_1, \dots, x_{n-1})$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, be the Dirichlet data for $(x; x \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0)$. The object of this paper is to determine the Gevrey class of u in $\{x; x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq x_n \leq a\}$ (a any positive) if $f_j \in S_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}}^{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$.

Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un punto arbitrario di $\mathbb{R}^n$; indichiamo con $P(D) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ un polinomio differenziale con coefficienti complessi costanti. Sia $s = (s_1, \dots, s_n)$; siano m_j il grado di $P(-is)$ in s_j , $m = \max\{m_j; j = 1, \dots, n\}$, $q = (q_1, \dots, q_n)$ con $q_j = m/m_j$; a ciascun monomio $s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n}$ associamo il numero $(\alpha, q) = \sum_{j=1}^n \alpha_j q_j$ che si chiamerà grado di s^α relativamente a q . Sia $P_0(-is)$ la somma dei termini di $P(-is)$ di grado massimo relativamente a q . P si dice quasi-ellittico se

$$P_0(-is) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad s \neq 0.$$

Fissiamo ora un indice, per esempio n .

Scopo delle righe che seguono è di qualificare la natura di una soluzione u di $P(D)u = 0$ per $x_n > 0$ sull'insieme $\{x; 0 \leq x_n \leq a\}$ con a positivo arbitrariamente fissato (eventualmente $+\infty$) in relazione all'appartenenza a spazi S_γ^β della traccia di u su $\{x; x_n = 0\}$ nel caso di P quasi-ellittico.

Ricordiamo che dire che $f \in S_\gamma^\beta = S_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}}^{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$ significa che esistono delle costanti positive C, A_j e B_j per $j = 1, \dots, n-1$ tali che

$$\left| x_1^{h_1} \dots x_{n-1}^{h_{n-1}} \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_{n-1}^{l_{n-1}}} \right| \leq CA_1^{h_1} \dots A_{n-1}^{h_{n-1}} B_1^{l_1} \dots B_{n-1}^{l_{n-1}} h_1^{h_1 \gamma_1} \dots h_{n-1}^{h_{n-1} \gamma_{n-1}} l_1^{l_1 \beta_1} \dots l_{n-1}^{l_{n-1} \beta_{n-1}}$$

$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\forall$ interi non negativi h_k, l_k ($k = 1, \dots, n-1$) (1).

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) GHELFAND e SCILOV, *Spazi di funzioni fondamentali e generalizzate*, Mosca 1958.

1. Le radici dell'equazione

$$P_0(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$$

sono tali che

$$\operatorname{Re} \lambda = O((|s_1|^{m_1} + \dots + |s_{n-1}|^{m_{n-1}})^{1/m_n}) = \lambda$$

per $\sum_{j=1}^{n-1} s_j^2 \rightarrow +\infty$. A queste sono asintotiche le radici di $P(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$. Per semplicità supponiamo semplici le une e le altre.

Siano $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ le radici di $P_0(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$ con parte reale < 0 per $\sum_{j=1}^{n-1} s_j^2 > 0$. Se $n > 2$ una radice che in un punto $(s_1, \dots, s_{n-1})$ ha parte reale < 0 (> 0), ha parte reale < 0 (> 0) $\forall (s_1, \dots, s_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$. Ciò non è vero nel caso di $n = 2$. Sempre per ragioni di semplicità supponiamo p indipendente da $(s_1, \dots, s_{n-1})$.

Consideriamo il problema

$$(I) \quad \begin{cases} P(D)u(x) = 0 & \text{per } x_n > 0 \\ \left. \frac{\partial^k u(x)}{\partial x_n^k} \right|_{x_n=0} = f_k(x_1, \dots, x_{n-1}), & k = 0, 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

Poniamoci in una classe di soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$ nella quale sia assicurata l'unicità della soluzione del problema (I); nel caso che le radici di $P(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$ asintotiche a $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ abbiano parte reale ≤ 0 $\forall (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ci si può porre per esempio nella classe indicata da Dikopolov e Scilov ⁽²⁾.

Le deduzioni che seguono si estendono però anche al caso che le radici $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ di $P(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$ asintotiche a $\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*$ abbiano parte reale > 0 in punti $(s_1, \dots, s_{n-1})$ (necessariamente appartenenti a insiemi limitati di $\mathbb{R}^{n-1}$).

Supponiamo $f_j \in S_{\gamma}^{\beta} = S_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}}^{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}}$ per $j = 0, 1, \dots, p-1$.

Allora esistono delle costanti positive $C_j, B_{1,j}, \dots, B_{n-1,j}, a_{1,j}, \dots, a_{n-1,j}$ tali che, qualunque siano gli interi non negativi $l_1, \dots, l_{n-1}$,

$$\left| \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_{n-1}} f(x_1, \dots, x_{n-1})}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_{n-1}^{l_{n-1}}} \right| \leq < C_j B_{1,j}^{l_1} \dots B_{n-1,j}^{l_{n-1}} l_1^{\beta_1} \dots l_{n-1}^{\beta_{n-1}} \exp(-a_{1,j} |x_1|^{1/\gamma_1} - \dots - a_{n-1,j} |x_{n-1}|^{1/\gamma_{n-1}});$$

se $\gamma_h = 0$ va soppresso nell'esponenziale il termine $-a_{h,j} |x_h|^{1/\gamma_h}$ (in particolare se $\gamma = 0$ allora f_j è a supporto compatto) ⁽³⁾.

(2) G. V. DIKOPOLOV e G. E. SCILOV, *Sui problemi al contorno ben posti per le equazioni alle derivate parziali in un semispazio*, « Izvestia Akad. Nauk S. S.S.R. », t. 24 (1960).

(3) Loc. cit. in (1).

Nella classe anzidetta la soluzione di (I) è

$$(2) \quad u(x) = \frac{I}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i \sum_{k=1}^{n-1} x_k s_k} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{V_j(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n)}{V(s_1, \dots, s_{n-1})} \cdot \tilde{f}_j(s_1, \dots, s_{n-1}) ds_1 \cdots ds_{n-1} = \sum_{j=0}^{p-1} u_j(x)$$

dove $V(s_1, \dots, s_{n-1})$ è il determinante che ha $(\lambda_1^{h-1}, \dots, \lambda_p^{h-1})$ come riga di posto h ($h = 1, \dots, p$), $V_j(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n)$ è il determinante che si ottiene da V sostituendo la riga di posto $j+1$ con $(\exp(\lambda_1 x_n), \dots, \exp(\lambda_p x_n))$ e $\tilde{f}_j(s_1, \dots, s_{n-1})$ è la trasformata di Fourier di $f_j(x_1, \dots, x_{n-1})$

$$\tilde{f}_j(s_1, \dots, s_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i \sum_{k=1}^{n-1} x_k s_k} f_j(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Risulta $u \in C^\infty(x_n \geq 0)$.

Per ogni fissato $x_n \geq 0$, $\frac{I}{V} \frac{\partial^{h_n} V_j}{\partial x_n^{h_n}}$ è limitato e

$$O(|s_1|^{m_1} + \dots + |s_{n-1}|^{m_{n-1}})^{(h_n-j)/m_n} \text{ per } \sum_{j=1}^{n-1} s_j^2 \rightarrow +\infty.$$

Fissiamo r in modo tale che sia

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{I}{I + \left(\sum_{t=1}^{n-1} |s_t|^{m_t}\right)^{r/m_n}} dx_1 \cdots dx_{n-1} < +\infty.$$

Sia $h_n > j$; allora

$$\left| \frac{\partial^{h_1+\dots+h_n} u_j(x)}{\partial x^{h_1} \cdots \partial x^{h_n}} \right| \leq C_j \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{I}{I + \left(\sum_{t=1}^{n-1} |s_t|^{m_t}\right)^{r/m_n}} \left[I + \left(\sum_{t=1}^{n-1} |s_t|^{m_t}\right)^{r/m_n} \right] \cdot |s_1|^{h_1} \cdots |s_{n-1}|^{h_{n-1}} \left(\sum_{t=1}^{n-1} |s_t|^{m_t}\right)^{(h_n-j)/m_n} |\tilde{f}_j(s_1, \dots, s_{n-1})| ds_1 \cdots ds_{n-1},$$

essendo C_j una opportuna costante positiva.

Poiché $\tilde{S}_V^\beta = S_V^\beta$ (4), si ha, per certe costanti C_j e $A_{1,j}, \dots, A_{n-1,j}$

$$|S_1^{k_1} \cdots S_{n-1}^{k_{n-1}} \tilde{f}_j(s_1, \dots, s_{n-1})| \leq C_j \cdot A_{1,j}^{k_1} \cdots A_{n-1,j}^{k_{n-1}} k_1^{k_1 \beta_1} \cdots k_{n-1}^{k_{n-1} \beta_{n-1}}.$$

(4) Loc. cit. in (1).

Questa maggioranza sussiste anche per i k_i non interi (reali non negativi); ne segue

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{h_1 + \dots + h_n} u_j(x)}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_n^{h_n}} \right| &\leq C_j A_{1,j}^{h_1} \dots A_{n-1,j}^{h_{n-1}} h_1^{h_1 \beta_1} \dots h_{n-1}^{h_{n-1} \beta_{n-1}} \\ &\cdot \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ A_{l,j}^{(h_n-j)(m_l/m_n)} \frac{\left[h_l + (h_n-j) \frac{m_l}{m_n} \right]^{[h_l + (h_n-j)(m_l/m_n)] \beta_l}}{h_l^{h_l \beta_l}} + \right. \\ &\left. + A_l^{(h_n+r-j)(m_l/m_n)} \frac{\left[h_l + (h_n+r-j) \frac{m_l}{m_n} \right]^{[h_l + (h_n+r-j)(m_l/m_n)] \beta_l}}{h_l^{h_l \beta_l}} \right\} \leq \\ &\leq C_j' A_{1,j}^{h_1} \dots A_{n-1,j}^{h_{n-1}} h_1^{h_1 \beta_1} \dots h_{n-1}^{h_{n-1} \beta_{n-1}} \sum_{l=1}^{n-1} h_n^{h_n (m_l \beta_l / m_n)} \end{aligned}$$

ove C_j, C_j' e $A_{l,j}$ sono opportune costanti positive.

Pertanto:

$$\text{Se } \delta = \max \left\{ \frac{m_l \beta_l}{m_n}; l = 1, \dots, n-1 \right\} \text{ allora}$$

$$u \in G_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \delta}(\{x; 0 \leq x_n \leq a\})$$

essendo $G_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \delta}$ la classe delle funzioni di Gevrey d'ordine $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \delta)$ sullo strato $\{x; 0 \leq x_n \leq a\}$ (a costante positiva arbitraria). Se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ hanno parte reale $\leq 0 \forall (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ allora si può anche porre $a = +\infty$.

2. Più in generale supponiamo che il polinomio $P(-is)$ sia $\binom{n}{k}$ ipoelittico per $k = 1, \dots, n-1$, cioè, posto $N_n(P) = \{s; s \in \mathbb{C}^n, \text{Im} s_j = 0 \text{ per } j < n, P(-is) = 0\}$, da $s \in N_n(P)$ e $|s_k| \rightarrow +\infty$ segua $|\text{Re } s_n| \rightarrow +\infty$, per $k = 1, \dots, n-1$ (5).

Allora esistono tre costanti positive a_k, b_k e α_k tali che su $N_n(P)$ si ha

$$|\text{Re } s_n| \geq \alpha_k |s_k|^{\alpha_k} - b_k$$

per $k = 1, \dots, n-1$ e quindi esistono due costanti positive a e b tali che

$$|\text{Re } s_n| \geq a \sum_{k=1}^{n-1} |s_k|^{\alpha_k} - b \quad \text{su } N_n(P).$$

Supponiamo che sia

$$|s_n| \leq C \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} |s_k|^{\alpha'_k} \right) \quad \text{su } N_n(P)$$

per certe costanti positive C e $\alpha'_k (\geq \alpha_k)$.

(5) E. A. GORIN, *Equazioni parzialmente ipoelittiche a coefficienti costanti*, «Sib. mat. Jour.», 3 (1962).

L'equazione $P(-is_1, \dots, -is_{n-1}, \lambda) = 0$ ha quindi le radici asintoticamente comprese tra $C_1 \sum_{k=1}^{n-1} |s_k|^{\alpha_k}$ e $C_2 \sum_{k=1}^{n-1} |s_k|^{\alpha'_k}$ essendo C_1 e C_2 due opportune costanti; inoltre se $\sum_{k=1}^{n-1} s_k^2$ è sufficientemente grande, ogni sua radice ha parte reale di segno costante, almeno se $n > 2$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono le radici con parte reale asintoticamente negativa si può porre un problema analogo a (1), e per la funzione analoga a (2) si può affermare che la sua restrizione a ogni strato $\{x; 0 \leq x_n \leq \text{cost. positiva}\}$ appartiene a una classe di Gevrey intermedia tra $G_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \delta}$ e $G_{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \delta'}$ con

$$\delta = \max \{\alpha_l \beta_l; l = 1, \dots, n-1\}, \quad \delta' = \max \{\alpha'_l \beta_l; l = 1, \dots, n-1\}.$$