

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

GIANNI BERTONI

**Determinazione della stabilità di sistemi non lineari  
mediante confronto con sistemi stabili di cui sia nota  
la traiettoria**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.3-4, p.  
171–180.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1967\\_8\\_43\\_3-4\\_171\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_3-4_171_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Controlli automatici.** — *Determinazione della stabilità di sistemi non lineari mediante confronto con sistemi stabili di cui sia nota la traiettoria.* Nota (\*) di GIANNI BERTONI, presentata dal Corrisp. G. EVANGELISTI.

SUMMARY. — A method is proposed for determining the stability of a non linear system by means of comparison with another linear or non linear stable system whose trajectories are known. The comparison utilises the geometric interpretation of Liapounov's second method.

A Liapounov function is used, defined by the solution of a proper "auxiliary system" of differential equations: the trajectory defined by the solution is not required to be closed. Moreover, an approximate evaluation of asymptotic stability region is proposed.

Examples are given, concerning second order systems with one or two non linearities.

#### INTRODUZIONE.

I. Come è noto, nel caso di sistemi autonomi, il metodo di Liapounoff è suscettibile di una semplice interpretazione geometrica. Secondo tale metodo un generico sistema:

$$(I) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

è asintoticamente stabile, in un dominio comprendente l'origine (che costituisce il punto d'equilibrio), se è possibile trovare una funzione  $V$ , definita positiva (negativa), tale che la sua derivata lungo la generica traiettoria soluzione del sistema (I) sia definita negativa (positiva) nella regione medesima. Nel caso di un sistema autonomo ciò significa che è possibile trovare una famiglia di curve chiuse, concentriche, rispetto alle quali la traiettoria sia sempre entrante. Data una certa funzione  $V$ , il dominio entro il quale il sistema è certamente stabile coincide [1] con l'insieme dei punti racchiusi dalla maggiore delle curve chiuse  $V = \text{cost.}$  entro la quale siano verificate le proprietà sopradescritte.

Nel caso di insuccesso nella ricerca di una funzione  $V$ , per un certo sistema, ciò non significa affatto che questo sistema sia instabile, o comunque che la sua zona di stabilità sia limitata a quella individuata dalla particolare funzione  $V$  trovata, come mostra la fig. 1 ove si è assunto un cerchio come funzione di Liapounoff.

Quello che esporremo è un metodo per la determinazione della stabilità di un sistema usando delle proprietà della funzione di Liapounoff ora ricordate.

In generale la ricerca della funzione  $V$  per un sistema di cui si vuol conoscere la stabilità, si fa assumendo una generica forma di cui si determinano

(\*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1967.

i coefficienti imponendo che siano soddisfatte le condizioni imposte dai teoremi di Liapounoff; in genere si sceglie una forma quadratica o, come nel caso di una sola non linearità compresa in un certo settore del piano delle fasi, la somma di una forma quadratica e di un integrale della non linearità (metodo di Lur'e).

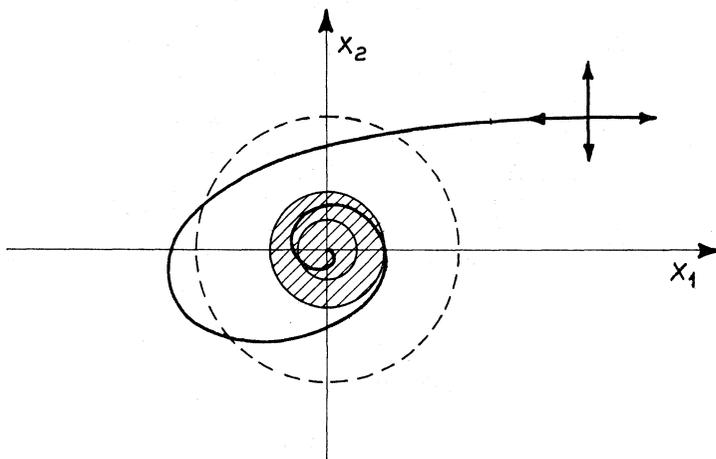


Fig. 1.

Nel nostro caso si userà, come funzione di Liapounoff, dapprima la generica traiettoria, chiusa, di un opportuno sistema stabile di equazioni differenziali (detto sistema ausiliario) ed imponendo che la generica traiettoria del sistema in esame sia sempre entrante rispetto a quella del sistema ausiliario.

Successivamente si dimostrerà che l'ipotesi di chiusura della traiettoria del sistema ausiliario, può essere rimossa.

In sostanza si tratta di un confronto tra un sistema sicuramente stabile ed un altro di cui si ignora il comportamento.

II. Supponiamo di avere un sistema, supposto stabile, del secondo ordine del tipo:

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

di cui vogliamo determinare una possibile \$V\$ di Liapounoff.

Questa \$V\$, per quanto sopra ricordato, deve essere una curva chiusa, a cui ora si impone la limitazione di essere soluzione di un generico sistema di equazioni differenziali in forma normale

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Questa ipotesi è molto larga e si può introdurre senza praticamente perdere nulla in generalità.

Ammettiamo dunque che una possibile funzione  $V$  del sistema (2) sia la soluzione del sistema (3) che chiameremo « sistema ausiliario »: dalla interpretazione geometrica, richiamata in I, si comprende che, affinché la soluzione di (3) sia veramente una funzione di Liapounoff del dato sistema (2), supposto stabile, bisogna che la generica traiettoria di quest'ultimo sia sempre entrante nella famiglia di curve  $V = \text{Cost}$ , per lo meno in un certo dominio comprendente l'origine.

Perché ciò accada basta che si abbia

$$(4) \quad \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 > 0$$

dove  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_3$  sono i vettori velocità relativi alle traiettorie soluzioni dei sistemi (2) e (3), le cui componenti sono ovviamente rappresentate da  $f_1, f_2$  e  $\varphi_1, \varphi_2$  rispettivamente, cioè

$$(5) \quad \mathbf{v}_2 = \{f_1, f_2\} \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \{\varphi_1, \varphi_2\}.$$

Sostituendo la (5) nella (4) si ha:

$$(6) \quad f_1 \cdot \varphi_2 - f_2 \cdot \varphi_1 > 0.$$

In conclusione diremo che se è possibile imporre che  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  siano tali da soddisfare la (6) e da far sì che la soluzione della (3) sia una traiettoria chiusa, quest'ultima è una funzione di Liapounoff.

In tal modo il problema della stabilità è risolto, a patto che si scelgano delle  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  che, oltre a soddisfare le condizioni sopradette, diano luogo ad un sistema (3) facilmente risolvibile.

Infante e Clark [3] che hanno affrontato il problema da un punto di vista simile al nostro, hanno dato come condizione sufficiente affinché la soluzione di (3) sia una curva chiusa la seguente:

$$\frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

che si ricava facilmente dal criterio di Bendixon.

Purtroppo se anche si scelgono le  $f_1$  ed  $f_2$  in modo tale da soddisfare tale equaglianza, non è affatto detto che l'equazione differenziale che ne deriva sia facilmente risolvibile; anzi in generale non lo è.

Perciò il criterio più opportuno per garantire non solo che il sistema sia facilmente risolvibile, ma anche che la soluzione sia una curva chiusa è quello di partire dalle equazioni parametriche di una opportuna curva chiusa e da queste risalire al sistema di equazioni differenziali di cui essa è soluzione. Del resto analogo metodo useremo nel seguito per garantirci la risolubilità nel caso di un sistema ausiliario avente una traiettoria aperta.

III. Dimostriamo ora che, per la verifica della stabilità del sistema (2), non è necessario che la soluzione del sistema ausiliario (3) sia una traiettoria chiusa; può essere anche aperta, purché essa sia stabile nel senso di Liapounoff.

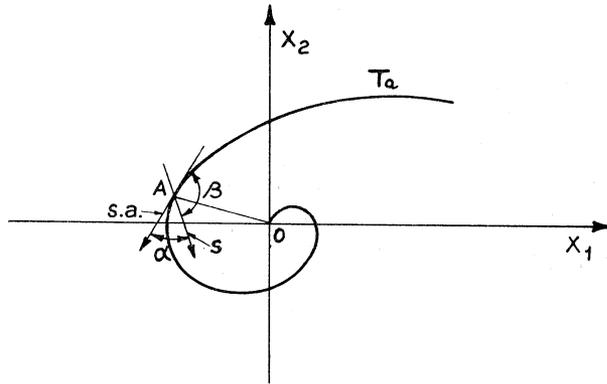


Fig. 2.

Supponiamo che la curva di fig. 2 sia la traiettoria  $T_a$  del sistema ausiliario; siano «  $s$  » e «  $s.a.$  » le direzioni, in un certo punto  $A$ , delle traiettorie del sistema (2) e del sistema ausiliario (3), rispettivamente: perché la traiettoria «  $s$  » sia certamente stabile, non basta imporre che sia valida la (6) perché in tal modo la direzione di «  $s$  » potrebbe risultare una qualunque di quelle incluse nell'angolo  $(\beta + \alpha)$  e perciò, pur essendo la traiettoria del sistema dato sempre entrante rispetto a quella del sistema ausiliario, essa potrebbe non essere stabile.

Congiungiamo perciò  $A$  con l'origine: questa congiungente può essere interpretata come la traiettoria del sistema

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Per la ricerca della stabilità si può ora operare come segue:

*a*) si applica il prodotto vettoriale alle coppie di sistemi (2), (7) e (3), (7) e si deducono le condizioni per le quali le traiettorie «  $s$  » ed «  $s.a.$  » sono dalla stessa parte rispetto ad  $O-A$ .

*b*) si applica la (6) ai sistemi (2) e (3).

Le condizioni ricavate da *(a)* e *(b)* impongono dunque che la traiettoria del sistema sia sempre entrante nel settore «  $s.a.$  »  $AO$ , e quindi, a maggior ragione, sia sempre entrante anche in una generica curva chiusa che sia funzione di Liapounoff del sistema ausiliario. In tal modo ci si riporta al caso precedente senza che sia necessario trovare esplicitamente la curva chiusa che funge da funzione di Liapounoff.

Il dominio di stabilità è l'insieme dei punti tali che, assunti come condizioni iniziali, sia la traiettoria del sistema ausiliario (3) sia quella del sistema (7)

si svolgono interamente nella zona di validità delle (a) e (b). Quanto fin qui detto vale naturalmente anche per i sistemi di ordine superiore al secondo purché le condizioni ricavate siano verificate dalle diverse componenti dei vettori ciascuna sul proprio piano di proiezione (il che, però, complica notevolmente le cose).

Quanto ai sistemi non autonomi, il metodo vale ancora purché, ovviamente le disuguaglianze trovate valgano per qualunque valore del tempo.

IV. 1) Una prima applicazione del metodo presentato può farsi assumendo come sistema ausiliario un sistema lineare generico a coefficienti costanti

$$(3') \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = Cx_1 + Dx_2 \\ \dot{x}_1 = Ax_1 + Bx_2. \end{cases}$$

Le possibili soluzioni di (3') sono ben note e dipendono dai valori assunti da A, B, C, D.

*Esempio:*

Sia dato il sistema:

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2. \end{cases}$$

Applicando le (a) e (b) del n. 2

$$(8) \quad (2') \wedge (7) = -x_2^2 - x_1^2 - (1 - x_1^2)x_1x_2$$

che è minore di zero nell'intorno dell'origine indicato tratteggiato in fig. 3

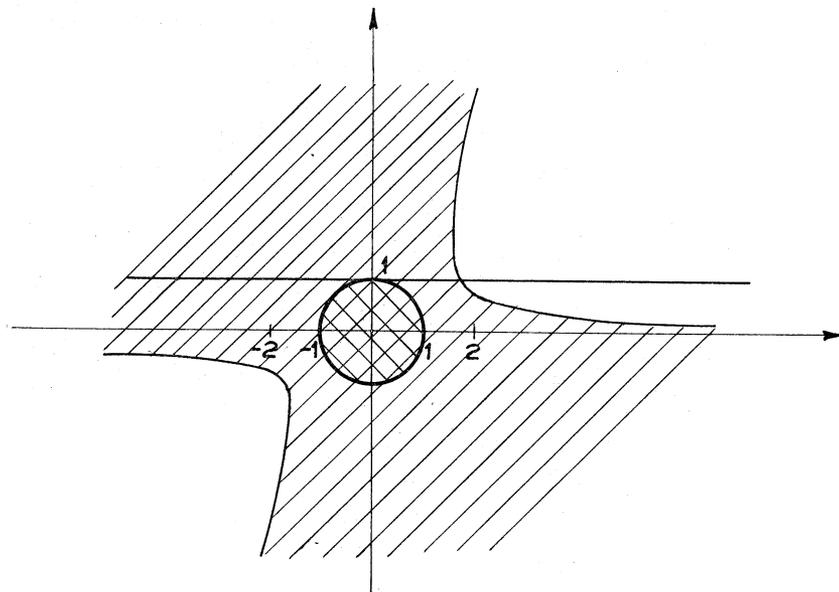


Fig. 3.

$$(9) \quad (3') \wedge (7) = -Ax_1 x_2 - Bx_2^2 + Cx_1^2 + Dx_1 x_2$$

perché anche questa espressione sia minore di zero, basta per il teorema di Sylverster, che sia

$$(9') \quad B > 0 \quad ; \quad C > 0 \quad ; \quad -BC - \frac{1}{4}(D-A)^2 > 0$$

con queste condizioni il discriminante del sistema (3') è  $< 0$  e perciò, per la stabilità, bisogna che, oltre alle (9') valga

$$(9'') \quad A + D \leq 0$$

in corrispondenza del segno  $<$  l'origine è un fuoco stabile;

in corrispondenza del segno  $=$  l'origine è un centro.

Applichiamo ora la (6)

$$(10) \quad (2') \wedge (3') = x_1 x_2 (C + B + A) + x_2^2 (D + B - Bx_1^2) + Ax_1^2 (1 - x_1 x_2) > 0.$$

Ponendo

$$(11) \quad D = A = 0 \quad ; \quad C = -B$$

la (9') e la (9'') sono sempre soddisfatte, mentre la (10) lo è solo se

$$(12) \quad x \leq 1.$$

Con le posizioni (11) il sistema ausiliario ha per soluzione un centro; ne segue che il dominio di stabilità così individuato è quello delimitato dalla circonferenza di raggio massimo interamente contenuto nella zona in cui sono contemporaneamente soddisfatte le condizioni dedotte dalle (8) e la (11) (zona a doppio tratteggio di fig. 3).

2) Una seconda applicazione del metodo può farsi adottando come sistema ausiliario quello che ha per soluzione una coppia di equazioni parametriche note.

Per esempio l'equazione di una generica spirale può scriversi in forma parametrica

$$(13) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{a}{t} \operatorname{sen}(nt + \varphi) \\ x_2 = \frac{b}{t} \cos nt \end{cases}$$

differenziando ed eliminando la  $t$  si ottiene il sistema di equazioni differenziali che ha per soluzione la (13)

$$(3'') \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = - \frac{x_1 \sqrt{x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} x_2^2 - 2 \frac{a}{b} x_2 x_1 \operatorname{sen} \varphi}}{a \cos \varphi} - nx_1 \operatorname{tg} \varphi + \frac{an}{b \cos \varphi} x_2 \\ \dot{x}_2 = - \frac{x_2 \sqrt{x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} x_2^2 - 2 \frac{a}{b} x_2 x_1 \operatorname{sen} \varphi}}{a \cos \varphi} - \frac{nbx_1}{a \cos \varphi} + n \operatorname{tg} \varphi x_2. \end{cases}$$

*Esempio:*

Riprendiamo il sistema esaminato nell'esempio precedente

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1(1 - x_1^2)x_2. \end{cases}$$

Applicando la (a) e la (b) si ha ancora la (8) e la

$$(14) \quad (3'') \wedge (7) = 2n \operatorname{tg} \varphi x_2 x_1 - \frac{nd}{\cos \varphi} \left( x_2^2 + \frac{1}{d^2} x_1^2 \right)$$

avendo posto  $a/b = d$ . La (14), per il teorema di Silverster, è definita negativa se vale

$$\frac{nd}{\cos \varphi} > 0$$

cioè, se  $n > 0$  e  $d > 0$ ,

$$\cos \varphi > 0$$

da cui

$$(15) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Applichiamo ora la (6) avendo posto

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} x_2^2 - 2 \frac{a}{b} x_1 x_2 \operatorname{sen} \varphi}}{a \cos \varphi} = F(x_1, x_2)$$

$$(2') \wedge (3'') = F(x_1, x_2) [x_1^3 x_2 - x_1 x_2 - x_2^2 - x_1^2] + n \operatorname{tg} \varphi [x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_2 + x_1^3 x_2] + \\ + \frac{dn}{\cos \varphi} [x_2^2 - x_1^2 x_2^2] > 0.$$

Applicando ancora una volta il teorema di Silverster e avendo assunto  $\varphi = -30^\circ$ ,  $d = 2$ ,  $n = 1$  si trova che la regione di validità della (16) è quella delimitata a tratto e punto in fig. 4 (la curva a tratto continuo delimita la regione di validità della (8)).

Concludendo, la regione di stabilità trovata utilizzando, come già detto, la conoscenza delle traiettorie del sistema ausiliario dà luogo ad una curva del tipo di quella punteggiata; questa curva è stata confrontata con la zona di stabilità ottenuta con il calcolatore analogico e rappresentata a tratti.

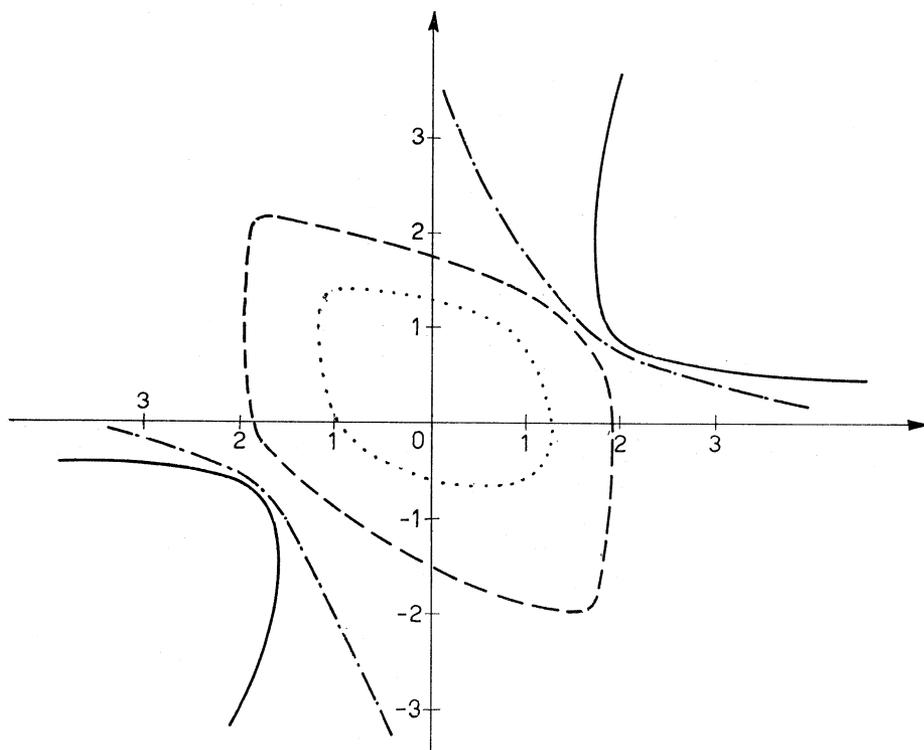


Fig. 4.

3) Un'altra possibile applicazione del metodo riguarda la valutazione della stabilità assoluta dei sistemi, con una o più non-linearità, come nello schema di fig. 5.

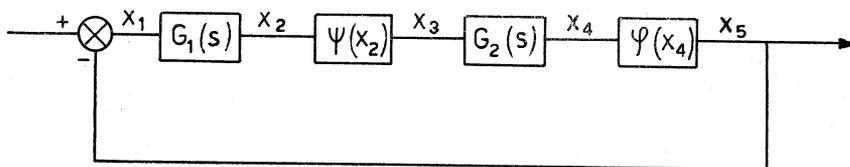


Fig. 5.

Occorre ammettere che le non-linearità  $\psi(x_2)$  e  $\varphi(x_4)$  siano comprese nei due generici settori di fig. 6; valgono, cioè le

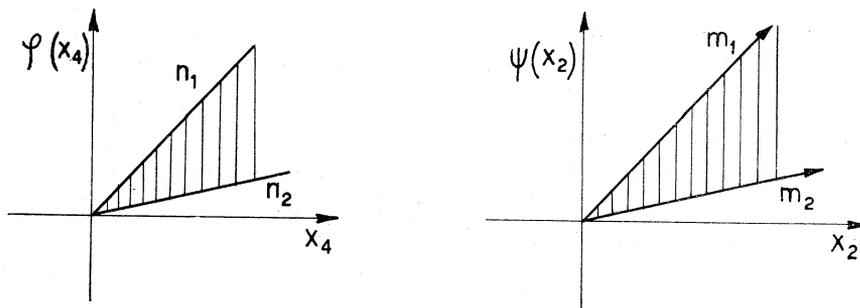


Fig. 6.

due relazioni seguenti:

$$n_2 \leq \frac{\varphi(x_4)}{x_4} \leq n_1 \quad ; \quad m_2 \leq \frac{\psi(x_2)}{x_2} \leq m_1 .$$

Per il resto le due non-linearità possono essere qualunque (quindi anche funzioni a più valori).

Per sistema di fig. 5 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x_2 &= G_1(s) x_1 & x_1 &= -x_5 \\ x_3 &= \psi(x_2) & x_5 &= \varphi(x_4) \\ x_4 &= G_2(s) x_3 \end{aligned}$$

Da queste posizioni si ricava il sistema:

$$(19) \quad \begin{cases} x_2 = -G_1(s) \varphi(x_4) \\ x_4 = G_2(s) \psi(x_2) . \end{cases}$$

Supponiamo che si abbia:

$$G_1 = \frac{-k_1}{1 + \tau_1 s} \quad ; \quad G_2 = \frac{-k_2}{1 + \tau_2 s} .$$

Segue perciò:

$$(20) \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{1}{\tau_1} x_2 + \frac{k_1}{\tau_1} \varphi(x_4) \\ \dot{x}_4 = -\frac{1}{\tau_2} x_4 - \frac{k_2}{\tau_2} \psi(x_2) . \end{cases}$$

Come sistema ausiliario possiamo prendere il solito sistema lineare dell'esempio I

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + Bx_4 \\ \dot{x}_4 = Cx_2 + Dx_4 . \end{cases}$$

Procedendo come di consueto abbiamo:

$$(20) \wedge (7) = \frac{x_2 x_4}{\tau_1} - \frac{k_1}{\tau_1} x_4 \varphi(x_4) - \frac{x_4 \cdot x_2}{\tau_2} - \frac{k_2}{\tau_2} \psi(x_2) x_2 .$$

tenendo conto della (18), si ha:

$$x_2 x_4 \left( \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1 \tau_2} \right) - x_4^2 \frac{k_1}{\tau_1} n_2 - x_2^2 \frac{k_2}{\tau_2} m_2 .$$

Applicando il teorema di Sylverster si ha:

$$(21) \quad k_1 k_2 n_2 m_2 > \frac{1}{4} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{\tau_1 \tau_2} .$$

Quanto alle (20)  $\wedge$  (7) basta richiamare la (9')

$$(22) \quad B > 0 \quad ; \quad C < 0 \quad ; \quad -BC - \frac{1}{4} (D - A)^2 > 0 .$$

Si ha inoltre:

$$(20) \wedge (21) = -\frac{C}{\tau_1} x_2^2 - \frac{D}{\tau_1} x_4 x_2 + \frac{k_1 C}{\tau_1} x_2 \varphi(x_4) + \frac{k_1 D}{\tau_1} x_4 \varphi(x_4) + \\ + \frac{A}{\tau_2} x_2 x_4 + \frac{B}{\tau_2} x_4^2 + \frac{k_2 A}{\tau_2} x_2 \psi(x_2) + \frac{k_2 B}{\tau_2} x_4 \psi(x_2) > 0$$

tenendo conto della (18) si ha:

$$(23) \quad x^2 \left( -\frac{C}{\tau_1} + \frac{k_1 A m}{\tau_2} \right) + x_4^2 \left( \frac{k_1}{\tau_1} D \cdot n + \frac{B}{\tau_2} \right) + \\ + x_4 x_2 \left( -\frac{D}{\tau_1} + \frac{A}{\tau_2} + \frac{k_1 C}{\tau_1} n + \frac{k_2 B \cdot m}{\tau_2} \right) > 0.$$

I pedici delle lettere  $m$  ed  $n$  vanno precisati tenendo conto dei valori di  $A, B, C, D$  e cercando di porsi nel caso peggiore.

Supponiamo di avere:

$$k_1 = 10, \quad k_2 = 1, \quad \tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 0,1, \quad m_1 = n_1 = 1$$

vogliamo determinare i valori di  $A, B, C, D$  affinché sia soddisfatta la (23).

Si ha:

$$x_2^2 (-C + 10A \cdot m) + x_4^2 (100n_1 + 10B) - x_4 x_2 (D - 10 \cdot A - 10C \cdot n - 10B \cdot m).$$

Assumendo

$$C = -2, \quad B = 1,5, \quad A = 5, \quad D = -1$$

si ottiene

$$m_2 = n_2 = 0,6.$$

Negli esempi fatti il valore dei parametri è stato scelto in modo da soddisfare le disuguaglianze, ma non ci si è curati di ottimizzarli, cosa invece opportuna qualora si voglia sfruttare al massimo il metodo proposto.

Lo scrivente ringrazia i proff. Giuseppe Evangelisti ed Enzo Belardinelli per i suggerimenti, la prof. Margherita Poli per l'aiuto, la dott. Daniela Mazzotti per la programmazione dei calcoli.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] LA SALLE-LEFSCHETZ, *Stability by Lyapounov's direct method with applications* «RIAS» Baltimora 1961.
- [2] V. I. ZUBOV, *Methods of A. M. Lyapounov and their applications*, 1964.
- [3] E. F. INFANTE e L. G. CLARK, *A method for the determination of the domain of stability of second order non linear autonomus systems*, «Journal of applied mechanics», giugno 1964.