Vinicio Villani

Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.3-4, p. 168–170.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_3-4_168_0>

Geometria. — *Un teorema di passaggio al limite per la coomologia degli spazi complessi.* Nota [*] di VINICIO VILLANI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Let X be a complex space, $\{X_i\}$ an increasing sequence of open subspaces of X, such that $X = \bigcup X_i$, and $\mathfrak{F}$ a coherent analytic sheaf on X. If the restrictions $\mathfrak{F}|X_i$ have certain cohomological properties, then we prove that similar properties hold for $\mathfrak{F}$ on the whole space X. For instance, if $H^j(X_i, \mathfrak{F}) = 0$ for every $j \geq 1$, then we prove that either $H^j(X, \mathfrak{F}) = 0$ for every $j \geq 1$, or $H^1(X, \mathfrak{F})$ has no Hausdorff topology.

Sia X uno spazio complesso (ridotto, con topologia numerabile). Supponiamo che $\{X_i\}_{i=1,2,\cdots}$ sia una successione crescente di sottospazi aperti di X, tali che $X = \bigcup X_i$. Sia poi $\mathfrak{F}$ un fascio analitico coerente su X. Sussiste il seguente

TEOREMA. – *Se per un certo intero $r \geq 1$, e per ogni indice i, si ha*

$$H^r(X_i, \mathfrak{F}) = 0 \qquad e \qquad H^{r+1}(X_i, \mathfrak{F}) = 0,$$

allora risulta

$$H^{r+1}(X, \mathfrak{F}) = 0$$

(cfr. ad esempio [1], pag. 20).

Come conseguenza immediata di questo teorema, si ha il

COROLLARIO 1. – *Sia dato un certo intero $r \geq 1$; se per ogni intero $j \geq r$, e per ogni indice i, si ha*

$$H^j(X_i, \mathfrak{F}) = 0,$$

allora risulta

$$H^s(X, \mathfrak{F}) = 0 \qquad per\ ogni \quad s \geq r+1.$$

In questo lavoro ci proponiamo di far vedere che sotto opportune ipotesi per il fascio $\mathfrak{F}$ si può migliorare il risultato del corollario 1, provando che anche $H^r(X, \mathfrak{F}) = 0$ (cfr. Teorema 3). Per dimostrare questo teorema, ci serviremo della «formula di Künneth–Grothendieck» stabilita da L. Kaup in [2], e che qui ricordiamo brevemente:

Seguendo la terminologia di [2], diremo che un fascio analitico coerente $\mathfrak{F}$ su uno spazio complesso X è un *r–fascio di Fréchet*, se esiste un ricoprimento di Leray $\mathfrak{M}$ di X, tale che la topologia naturale di $H^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ sia separata (e quindi di Fréchet) per $p = 1, 2, \cdots, r$ [(1)].

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 settembre 1967.

(1) Cfr. [2], def. 4.1. Si noti che per $p = 0$ la topologia naturale di $H^0(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$ è sempre separata. Ciò in generale non è più vero per $p > 0$ (cfr. [3], n. 14).

TEOREMA 2 (cfr. [2], Korollar 1, pag. 166). – *Siano* X, Y *due spazi complessi, siano poi* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *due fasci analitici coerenti definiti rispettivamente su* X *e su* Y. *Se per un certo intero* $r \geq 1$, $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *sono r–fasci di Fréchet, allora si ha*

$$\text{(1)} \qquad H^n(X \times Y, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{G}) = \prod_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{F})\,\varepsilon\,H^q(Y, \mathcal{G}),$$

per $n = 0, 1, \cdots, r-1$.

Osservazione. – Nella formula (1) il simbolo ε denota il prodotto tensoriale sul corpo complesso, completato per la ε–topologia. Si noti che $\mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{G}$ è un fascio analitico coerente su $X \times Y$, la cui spiga nel punto (x, y) risulta definita in termini delle sole spighe $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{G}_y$. Questa osservazione assicura che, se X_0 è un aperto di X, e Y_0 è un aperto di Y, si ha

$$(\mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{G})|X_0 \times Y_0 \simeq (\mathcal{F}|X_0)\,\varepsilon\,(\mathcal{G}|Y_0).$$

A questo punto possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA 3. – *Sia sempre* X *uno spazio complesso; sia* $\{X_i\}$ *una successione crescente di sottospazi aperti di* X, *tali che* $X = \bigcup_i X_i$. *Sia* $\mathcal{F}$ *un fascio analitico coerente su* X, *tale che* $\mathcal{F}$ *e tutte le restrizioni* $\mathcal{F}|X_i$ *siano r–fasci di Fréchet* (*per un opportuno intero r*). *In queste ipotesi, se si ha*

$$H^j(X_i, \mathcal{F}) = 0 \quad \textit{per ogni } i, \quad \textit{e per ogni } j \geq r,$$

allora anche

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0.$$

Dimostrazione. – Essendo $H^j(X_i, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $j \geq r$, il corollario 1 assicura che, qualunque sia il ricoprimento di Leray $\mathfrak{M}$ di X, si ha $H^s(\mathfrak{M}, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $s \geq r+1$; in particolare, la topologia naturale di $H^s(\mathfrak{M}, \mathcal{F})$ è banalmente separata per $s = r+1, r+2, \cdots$; d'altronde $\mathcal{F}$ era per ipotesi un r–fascio di Fréchet; ne viene che $\mathcal{F}$ è più in generale un s–fascio di Fréchet, per ogni s. Lo stesso ragionamento vale per le restrizioni $\mathcal{F}|X_i$. Pertanto possiamo applicare la formula (1), per ogni n, a due copie dello stesso fascio $\mathcal{F}|X_i$; ci interessano in particolare le formule seguenti:

$$\text{(2)} \qquad H^{2r-1}(X_i \times X_i, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}) \simeq \prod_{p=0,\cdots,2r-1} H^p(X_i, \mathcal{F})\,\varepsilon\,H^{2r-p-1}(X_i, \mathcal{F})$$

$$\text{(3)} \qquad H^{2r}(X_i \times X_i, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}) \simeq \prod_{p=0,\cdots,2r} H^p(X_i, \mathcal{F})\,\varepsilon\,H^{2r-p}(X_i, \mathcal{F})$$

(scrivendo $\mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}$ in luogo di $(\mathcal{F}|X_i)\,\varepsilon\,(\mathcal{F}|X_i)$ non si crea alcuna ambiguità come si è già osservato sopra). Nei secondi membri delle (2) e (3) compare sempre un $H^j(X_i, \mathcal{F})$ con $j \geq r$, che quindi è nullo per ipotesi; ne viene

$$H^{2r-1}(X_i \times X_i, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}) = 0 \quad ; \quad H^{2r}(X_i \times X_i, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}) = 0.$$

Sfruttando il teorema 1, segue subito $H^{2r}(X \times X, \mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{F}) = 0$. D'altronde questo gruppo di coomologia si può scrivere sempre in virtù della formula (1), come segue:

$$o = H^{2r}(X \times X\,, \mathfrak{F}\, \varepsilon\, \mathfrak{F}) \simeq \prod_{p=0,\cdots,2r} H^{p}(X\,, \mathfrak{F})\, \varepsilon\, H^{2r-p}(X\,, \mathfrak{F}).$$

Tra i termini che compaiono al secondo membro, figura $H^r(X\,, \mathfrak{F})\, \varepsilon\, H^r(X\,, \mathfrak{F})$, che pertanto dev'essere nullo. D'altronde se per assurdo si avesse $H^r(X\,, \mathfrak{F}) \neq o$, ne seguirebbe anche $H^r(X\,, \mathfrak{F}) \otimes H^r(X\,, \mathfrak{F}) \neq o$ (si tratta di un prodotto tensoriale di spazi vettoriali sul corpo complesso). Siccome $H^r(X\,,\mathfrak{F}) \otimes H^r(X\,,\mathfrak{F})$ è contenuto in $H^r(X\,,\mathfrak{F})\, \varepsilon\, H^r(X\,,\mathfrak{F})$, ciò è assurdo. Quindi dev'essere appunto $H^r(X\,, \mathfrak{F}) = o$. C.V.D.

COROLLARIO 2. – *Sia* X *uno spazio complesso, riunione di una successione crescente di suoi sottospazi aperti* X_i. *Supponiamo che, per ogni* i, X_i *sia di Stein* (2). *Sia poi* $\mathfrak{F}$ *un fascio analitico coerente su* X. *Allora si ha* $H^1(X\,, \mathfrak{F}) = o$ *se e solo se* $\mathfrak{F}$ *è un* 1*–fascio di Fréchet.*

In particolare lo spazio X *risulterà di Stein se e solo se ogni fascio di ideali* $\mathfrak{J}$ *su* X *è un* 1*–fascio di Fréchet.*

Dimostrazione. – Per la prima asserzione basta applicare il teorema 3, le cui ipotesi sono certo soddisfatte per $r = 1$ (teorema B, applicato agli spazi X_i).

Per provare la seconda asserzione, si osservi che se tutti i fasci $\mathfrak{J}$ sono 1–fasci di Fréchet, sia ha $H^1(X\,, \mathfrak{J}) = o$ per ogni fascio di ideali di X, a norma di quanto visto sopra; per un noto teorema di Serre, questa proprietà caratterizza gli spazi di Stein.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ANDREOTTI et E. VESENTINI, *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets*, « Séminaire Ehresmann », *4*, 1–31, Paris (1962–63).

[2] L. KAUP, *Eine Künnethformel für Fréchetgarben*, « Math. Zeitschr. », *97*, 158–168 (1967).

[3] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, « Comm. Math. Helv. », *29*, 9–26 (1955).

(2) Si noti che non supponiamo soddisfatta alcuna « condizione di Runge » per le coppie $(X_i\,, X_{i+1})$, e quindi non si sa se $X = \cup X_i$ risulta di Stein.