
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GLEB WATAGHIN

**Sulla formulazione di una teoria non locale basata
sull'uso dello spazio di De Sitter e sulla sua
applicazione al modello composto delle particelle
elementari.**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.3-4, p.
154-157.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_3-4_154_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica teorica. — *Sulla formulazione di una teoria non locale basata sull'uso dello spazio di De Sitter e sulla sua applicazione al modello composto delle particelle elementari.* Nota (*) del Socio GLEB WATAGHIN.

SUMMARY. — A non local theory of a particle composed of "quarks" is studied on the example of a π -meson. A De Sitter metrics is introduced in the 4-momentum space and a simple approximate equation for the interaction of two quarks is proposed and solved.

Recentemente l'autore ha proposto l'introduzione della metrica di De Sitter nello spazio degli impulsi e di energie, nei casi in cui si deve descrivere la dinamica dei «quark» (ossia di particelle costituenti le particelle elementari) interagenti fra loro e col «vuoto». In questa nota sarà brevemente descritto il modello di un mesone composto da due «quark».

Il movimento del baricentro di una particella libera, in particolare di un mesone, obbedisce per ipotesi alle leggi della relatività ristretta, in approssimazione in cui non si introducono problemi riguardanti la gravitazione e la cosmologia (universo in espansione). Pertanto assumeremo che è possibile scegliere un sistema di riferimento lorentziano in cui l'impulso totale del mesone è nullo. In questo sistema di riferimento si può introdurre quattro tetravettori unitari, di cui il primo $u_\mu^{(4)}$ è parallelo al tetravettore dell'impulso totale P_μ e quindi ha per componenti $u_\mu^{(4)} = P_\mu / \sqrt{P_\mu P^\mu}$, che nel baricentro diventano $(1, 0, 0, 0)$, mentre gli altri tre $u_\mu^{(1)}, u_\mu^{(2)}, u_\mu^{(3)}$ hanno direzioni nello spazio tridimensionale e sono ortogonali fra di loro. Introduciamo con metodo già descritto in alcune note precedenti [1] i quattro invarianti seguenti: $I_1(u^{(1)}, k) = l k^\mu u_\mu^{(1)}, \dots, I_4(u^{(4)}, k) = l k^\mu u_\mu^{(4)}$ ecc., che descrivono il prodotto della lunghezza universale l per le proiezioni di un tetraimpulso generico k_μ sui quattro versori $u_\mu^{(a)}$ ($a = 1, 2, 3, 4$) sopracitati. Introduciamo ora uno spazio di De Sitter $(4+1)$ e $(3+2)$ con cinque coordinate $\xi_1 \dots \xi_5$ che soddisfano le relazioni seguenti:

$$(1) \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 \pm \xi_5^2 = \pm M^2$$

e sono legate a invarianti relativistici $I_a(u^{(a)}, k)$ dalle relazioni:

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_a = M I_a \cdot \Phi(I_1 \dots I_4) \\ M^2 - \xi_5^2 = \pm \Phi^2 M^2 \cdot \{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 - I_4^2\} \end{cases} \quad \text{per } a = 1, 2, 3, 4$$

ove Φ è un fattore di taglio (cutoff).

(*) Pervenuta all'Accademia il 20 ottobre 1967.

Sia M una costante universale avente le dimensioni di un'energia legata ad una lunghezza universale $l \sim 10^{-14}$ cm dalla relazione $M = \frac{\hbar}{cl} = l^{-1}$ (poniamo $\hbar = 1$ e $c = 1$). Adottiamo il metodo dei fattori di forma o di «cutoff» già descritto [1] e definiamo a mezzo degli operatori invarianti:

$$(3) \quad \begin{cases} G^+(k) = [1 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2]^{-3/2} [1 + iI_4]^{-1} \\ G^-(k) = [1 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2]^{-3/2} [1 - iI_4]^{-1} \end{cases}$$

un intorno dell'infinito nello spazio degli impulsi e dell'energia tale che $G^+(I_a)G^-(I_a) = \Phi \ll 1$ in questo intorno, che chiameremo Σ_l , e definiamo a mezzo delle trasformate di Fourier di $G^\pm(k)$ un intorno quadrimensionale S_l nello spazio-tempo, del baricentro $X^{(b)}$ del mesone—considerato ⁽¹⁾. L'intorno S_l è «duale» di Σ_l e soddisfa alle disequaglianze

$$(4) \quad |y_a| = |I_a(u^{(a)}, x_\mu - X_\mu^b)| \lesssim l^2.$$

Quest'intorno S_l è ovviamente definito rispetto ad assi baricentrici paralleli a $u_\mu^{(1)}, \dots, u_\mu^{(4)}$. Nella dinamica dei quark sotto descritti si trova che i valori di y_a che soddisfano (4) hanno probabilità ~ 1 , i valori esterni a S_l hanno probabilità $\rightarrow 0$, e la metrica esterna ad S_l e a Σ_l è quella di Lorentz.

Il metodo, proposto da Dirac [2], permette di introdurre cinque matrici $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_5$ di Dirac anche nello spazio di De Sitter. Il tetra-impulso di una

particella di spin $1/2$ può essere rappresentato mediante la forma $\Xi = \sum_{a=1}^5 \gamma_a \xi_a$,

vedi [4], ove $\Xi^2 = M^2$. Indichiamo con q_{jz}^+ l'operatore che crea la particella spinoriale detta «quarko», e con $a_{j,-z}^+$ l'operatore che crea l'antiparticella detta «antiquarko». q_{jz}^- , $a_{j,-z}^-$ saranno i corrispondenti operatori di distruzione. Gli indici z indicano i parametri che cambiano di segno passando alle antiparticelle. Gli indici j includono tutti i parametri che non cambiano segno passando alle antiparticelle.

Seguendo la trattazione di problemi analoghi proposta da Heisenberg, Ivanenko, Fermi e Yang, Kemmer, Bogolubov, Marshak ed altri, introduciamo nello spazio di De Sitter [1] un hamiltoniano che contiene termini del tipo $q_{jz}^+ O_i a_{j,-z}^+$ e $q_{jz}^- O_i a_{j,-z}^-$ che corrispondono alla creazione e all'annichilamento di una coppia «quarko-antiquarko», e inoltre contiene termini, ottenibili per iterazione, del tipo $q_{jz}^+ O_i a_{j,-z}^+ q_{jz}^- O_i a_{j,-z}^-$, ove O_i è un operatore che distingue le interazioni del tipo vettoriale o assiale oppure di altri tipi. Per ottenere l'equazione stazionaria di Schrödinger nello spazio degli impulsi baricentrici, seguendo il formalismo proposto dall'autore [1], si deve definire la correlazione tra i parametri ξ_a e gli impulsi $I_a(k)$ baricentrici misurabili,

(1) Il quale rimane indeterminato se conosciamo con sufficiente precisione il valore del tetraimpulso totale P_μ .

ossia si devono scegliere i fattori di forma $\Phi(I_a)$. Ponendo: $\Phi = G^+ G^-$ si ottiene il seguente operatore hamiltoniano:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = H_0 + H' ; \quad H_0 = \Sigma \varepsilon_k \{ Q_k^+ Q_k^- + A_{-k}^+ A_{-k}^- \} , \quad M_Q = M_A = M', \\ M'^2 = M^2 (I_4^2 - \vec{I})^2 = \varepsilon_k^2 - \vec{k}^2 = \Phi^{-2} (\xi_4^2 - \vec{\xi}^2) , \quad \varepsilon_k = \sqrt{M'^2 + \vec{k}^2} \\ H'/M = -g_0 \Sigma \{ G_k^- G_k^- Q_k^- A_{-k}^- + G_k^+ G_k^+ Q_k^+ A_{-k}^+ \} - \\ \quad - g_0^2 \{ \Sigma (G_k^+ G_k^-)^2 Q_k^+ A_{-k}^+ Q_k^- A_{-k}^- + \text{h.c.} \} , \\ \psi = N \{ |o\rangle + [\Sigma F(k) G_k^+ G_k^+ Q_k^+ A_{-k}^+ | o\rangle \} , \quad I = N^2 \{ I + \Sigma F^2(k) (G^+ G^-)^2 \} . \end{array} \right.$$

Usando il metodo di Fock, Tamm e Dancov, limitiamoci a tener conto di stati che contengono non più di due particelle. La soluzione dell'equazione di Schroedinger $H\psi = m\psi$ potrà esser scritta nella forma seguente:

$$(6) \quad m/M = g_0^2 \sum_k (G_k^+ G_k^-)^2 - g_0 \sum_k (G_k^+ G_k^-)^2 F(k) , \quad F(k) = \frac{g_0 M}{2\varepsilon_k - m + g_0^2 (G_k^+ G_k^-)^2 M}$$

con la condizione di normalizzazione indicata nella (5).

Si trova facilmente con calcoli numerici il valore di m che risulta $\sim 0,01 M'$.

La costante $g = g_0 N$ rinormalizzata si determina tenendo conto della (5). Assumendo che la massa dei quark M' ha il valore di $\sim 5 M$, ove M è il raggio di curvatura dello spazio di De Sitter (di energia e impulso) nel dominio Σ_I , si ottiene per la massa m dei mesoni pseudoscalari (nel problema degenerare sopra indicato) un valore inferiore alla massa protonica $m \ll \frac{1}{10} M'$, se M' è dell'ordine di dieci masse protoniche.

Nel problema qui trattato le forze responsabili della stabilità del modello sono derivate non da un potenziale, bensì dalle funzioni $G^+ G^-$ che danno ampiezze di probabilità definite dagli operatori di cutoff G_k^+ e G_k^- , e quindi dall'ipotesi concernente la curvatura dei domini quadrimenzionali Σ_I dello spazio degli impulsi.

Dettagli del calcolo precedente saranno pubblicati in un'altra nota.

Si conclude che la possibilità di introdurre una metrica di De Sitter nei domini Σ_I dello spazio degli impulsi, unita alla ipotesi che i fattori di forma da scegliere G^+ e G^- devono soddisfare le condizioni di invarianza relativistica, della causalità macroscopica, e dell'unitarietà, suggeriscono il metodo sopraindicato per la trattazione del modello composto di particelle elementari. Il problema delle simmetrie SU_6 ed altre sarà oggetto di un'ulteriore ricerca.

Infine vogliamo notare che le relazioni fra le coordinate dell'impulso di De Sitter e i tetraimpulsi I_a sono state scelte in modo che risulti: $q_{f,s}^\pm = G^\pm Q_k^\pm$ ecc., e che il significato geometrico statistico di $\Phi^4 = (G^+ G^-)^4$ è quello del rapporto dei volumi $d^4 \xi$ e $M^4 \cdot d^4 I_a$.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE.

- [1] Rendiconti della Conferenza, *Sui campi non locali*, (Dubna, Luglio 1967) e Rendiconti della Conferenza di Kiev (Maggio 1967) pubblicati dall'Acc. dell'URSS.
- [2] Proc. Inter. Conf. on Elementary Particles, Kyoto 1965.
- [3] Notoriamente molti Autori hanno studiato le applicazioni della metrica di De SITTER (DIRAC nel 1935, SNYDER nel 1947) ed altri Autori hanno studiato spazio degli impulsi curvo (I. TAMM nel 1965 e altri). Il tentativo esaminato in questa Nota differisce da tutti quelli a me noti.
- [4] F. GURSEY, *Group theoretical concepts and particle physics*, « Istanbul Summer School », 1962, p. 365; G. CICOGLA, « Nuovo Cimento », 42, 656 (1966).