Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Sulla relazione fondamentale del calcolo numerico di un integrale pluridimensionale per decomposizione in prodotto dell'integrando

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.1-2, p. 3–8.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_1-2_3_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1967 (Luglio–Agosto)

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

Analisi numerica. — *Sulla relazione fondamentale del calcolo numerico di un integrale pluridimensionale per decomposizione in prodotto dell'integrando.* Nota [(*)] del Socio MAURO PICONE.

SUMMARY. — In a previous paper inequality (1) was proved. It furnishes an upper bound to the approximation error in the numerical computation method of a multiple integral obtained by decomposing into product the function to be integrated.

It is now shown that the numerical coefficient which appears in the right hand side of (1) cannot, in general, be improved.

Nella mia Nota [(1)] dal titolo: *Sul calcolo numerico di integrali pluridimensionali per decomposizione in prodotto dell'integrando*, chiamo relazione fondamentale di quel calcolo la seguente, colà dimostrata,

$$\left| \frac{1}{\text{mis T}} \int_{\mathrm{T}} \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx - \frac{1}{(\text{mis T})^n} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{T}} f_i(x)\, dx \right| \leq \tag{1}$$

$$\frac{1}{12} \sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} \mathrm{L}_h \mathrm{L}_k \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} \mathrm{M}_i (\text{diam T})^2$$

nella quale T rappresenta un arbitrario dominio rettangolare dello spazio euclideo $S_{(r)}$, a r dimensioni, x un punto di tale spazio, di coordinate $x_1, x_2, \cdots, x_r$, $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ funzioni complesse del punto x, uni-

(*) Pervenuta all'Accademia il 17 agosto 1967.

(1) Presentemente in corso di stampa nel volume 12° (1967), della « Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées », dedicato a Octav Onicescu, nel suo settantacinquesimo anniversario.

formemente lipschitziane in T, rispettivamente, coi coefficienti L_i, ivi, rispettivamente, in modulo non superiori ai numeri M_i, diam T il diametro di T, e avendo designato coi simboli

$$\sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} \quad , \quad \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} M_i ,$$

rispettivamente, una somma estesa a tutte le combinazioni (h, k) degli indici: $1, 2, \cdots, n$ e il prodotto dei numeri $M_1, M_2, \cdots, M_n$, esclusi quelli di indici h e k.

Dalla relazione indicata si trae una maggiorazione dell'errore che si commette, nel calcolo numerico di un integrale r–dimensionale, applicando il considerato metodo per decomposizione in prodotto dell'integrando, la cui maggiorante è affetta del coefficiente $1/12$ che compare nella (1), donde la domanda, che il calcolatore deve porsi: *Non è forse possibile sostituire, nella* (1), *per ogni coppia di valori di n e di r, il coefficiente* $1/12$, *con un numero* $\nu(r, n)$ – *indipendente da* T *e dalle funzioni $f_i(x)$ – che sia minore di* $1/12$?

Nella mia citata Nota è dimostrato, nel caso particolare $r = 1$, $n = 2$, che $1/12$ è – in generale – il minimo valore del coefficiente $\nu(r, n)$, per il quale sussiste la relazione:

$$\left| \frac{1}{\operatorname{mis} T} \int_T \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx - \frac{1}{(\operatorname{mis} T)^n} \prod_{i=1}^{n} \int_T f_i(x)\, dx \right| \leqq \nu(r, n) \sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} L_h L_k \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} M_i (\operatorname{diam} T)^2, \tag{2}$$

e scopo della presente è di dimostrare che la stessa circostanza ha luogo, per quali si vogliano valori di r e di n.

Per il dominio quadrato $T(\delta)$, dello spazio $S_{(r)}$, luogo dei punti x per i quali

$$0 \leqq x_h \leqq \delta \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

detti:

$M_i(\delta)$ il massimo di $|f_i(x)|$ in $T(\delta)$,

$L_i(\delta)$ un coefficiente di Lipschitz per $f_i(x)$ in $T(\delta)$, la (1) si scrive:

$$\frac{1}{r\delta^{rn+2}} \left| \delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx - \prod_{i=1}^{n} \int_{T(\delta)} f_i(x)\, dx \right| \leqq \frac{1}{12} \sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} L_h(\delta) L_k(\delta) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} M_i(\delta).$$

Facciamo le ipotesi seguenti.

a) Nel dominio quadrato $T(\delta_0)$, si abbia

$$f_i(x) \equiv f_i(0) + f_i'(0)(x_1 + x_2 + \cdots + x_r) + \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} f_{ihk}(x)\, x_h x_k ,$$

con

$$f_{ihk}(x) \equiv f_{ikh}(x),$$

(3) $$f_i(0) > 0 \quad , \quad f_i'(0) > 0 \quad , \quad |f_{ihk}(x)| \leqq \mathrm{P},$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n\,;\, h, k = 1, 2, \cdots, r)$$

designando P una costante.

b) Le funzioni $f_{ihk}(x)$ siano uniformemente lipschitziane, in $\mathrm{T}(\delta_0)$, con un comune coefficiente Q.

Si ha, allora, per $\delta \leqq \delta_0$,

$$f_i(0) \leqq \mathrm{M}_i(\delta) \leqq f_i(0) + r f_i'(0)\,\delta + r^2\,\mathrm{P}\delta^2,$$

e quindi

(4) $$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{M}_i(\delta) = f_i(0).$$

Per i punti, di $\mathrm{T}(\delta)$, x di coordinate $x_1, x_2, \cdots, x_r$ e x' di coordinate $x_1, \cdots, x_{l-1}, x_l + \Delta x_l, x_{l+1}, \cdots, x_r$, si ha:

$$f_i(x') - f_i(x) = f_i'(0)\,\Delta x_l + f_{ill}(x')\,(x_l + \Delta x_l)^2 - f_{ill}(x)\,x_l^2$$
$$+ 2 \sum_{h=1}^{n}{}^{(l)} [f_{ilh}(x')\,(x_l + \Delta x_l) - f_{ilh}(x)\,x_l]\,x_h$$
$$+ \sum_{h=1}^{n}{}^{(l)} \sum_{k=1}^{n}{}^{(l)} [f_{ihk}(x') - f_{ihk}(x)]\,x_h\,x_k,$$

dove col simbolo $\Sigma^{(l)}$ è indicata una somma di termini privata di quello d'indice l. Ne segue che, per x e x' in $\mathrm{T}(\delta)$, supposto, *come sempre sottintenderemo in seguito*, $\delta \leqq \delta_0$, risulta

$$|f_i(x') - f_i(x)| \leqq \{f_i'(0) + (2r + 1)\,\mathrm{P}\delta + r^2\,\mathrm{Q}\delta^2\}\,|\Delta x_l|,$$

e quindi che $f_i(x)$ è uniformemente lipschitziana in $\mathrm{T}(\delta)$, con coefficiente

$$\mathrm{L}_i(\delta) = f_i'(0) + (2r + 1)\,\mathrm{P}\delta + r^2\,\mathrm{Q}\delta^2,$$

avendosi, dunque,

(5) $$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{L}_i(\delta) = f_i'(0).$$

Supposto che sussista la relazione:

(6) $$\frac{1}{r\delta^{rn+2}} \left| \delta^{r(n-1)} \int_{\mathrm{T}(\delta)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x - \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathrm{T}(\delta)} f_i(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq$$
$$\nu(r, n) \sum_{1\,(h,k)}^{n} \mathrm{L}_h(\delta)\,\mathrm{L}_k(\delta) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} \mathrm{M}_i(\delta),$$

se si dimostra che:

(7) $$\lim_{\delta \to 0} \left\{ \frac{1}{r\delta^{rn+2}} \left| \delta^{r(n-1)} \int_{\mathrm{T}(\delta)} \prod_{i-1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x - \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\,\mathrm{d}x \right| \right\} =$$
$$\frac{1}{12} \sum_{1\,(h,k)}^{n} f_h'(0)\,f_k'(0) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} f_i(0),$$

seguirà, dalle (4) e (5),

$$\frac{1}{12}\sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} f_h'(0) f_k'(0) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} f_i(0) \leqq \nu(r,n) \sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} f_h'(0) f_k'(0) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} f_i(0)$$

e quindi, in base alla (3)

$$\nu(r,n) \geqq \frac{1}{12},$$

e che, pertanto, $1/12$ è il minimo valore del coefficiente $\nu(r,n)$, per il quale sussiste, in generale, la (6).

Dimostrazione della (7). Posto

$$\sigma = x_1 + x_2 + \cdots + x_r \quad , \quad F_i(x) \equiv \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f_{ihk}(x)\, x_h\, x_k ,$$

si ha, in $T(\delta)$,

$$|F_i(x)| \leqq P\sigma^2 \leqq r^2 P\delta^2 . \tag{8}$$

Si ha pure:

$$\delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \prod_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx = \tag{9}$$

$$\delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \prod_{i=1}^{n} [f_i(0) + f_i'(0)\,\sigma]\, dx + \delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \sum_{h=i}^{n} F_h(x) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h)} [f_i(0) + f_i'(0)\,\sigma]\, dx$$

$$+ \delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \sum{}_{(h,k)} F_h(x) F_k(x) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} [f_i(0) + f_i'(0)\,\sigma]\, dx + \cdots + \delta^{r(n-1)} \int_{T(\delta)} \prod_{i=1}^{n} F_i(x)\, dx,$$

$$\int_{T(\delta)} f_i(x)\, dx = f_i(0)\, \delta^r + \frac{r}{2} f_i'(0)\, \delta^{r+1} + \int_{T(\delta)} F_i(x)\, dx \;{}^{(2)},$$

(2) Indicato con p un numero intero, positivo o nullo, e introdotto il numero razionale

$$(r,p) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (t_1 + t_2 + \cdots + t_r)^p\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_r =$$

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=p} \frac{p!}{(k_1+1)!\,(k_2+1)!\cdots(k_r+1)!}$$

si ha:

$$\int_{T(\delta)} \sigma^p\, dx = (r,p)\, \delta^{r+p},$$

$$(r,0) = 1 \quad , \quad (r,1) = \frac{r}{2} \quad , \quad (r,2) = \frac{r}{12} + \frac{r^2}{4} \quad , \quad (r,3) = \frac{r^2 + r^3}{8}, \cdots .$$

Nell'espressione di $(r,2)$ compare già il coefficiente $1/12$.

$$(10)\qquad \prod_{i=1}^{n}\int_{T(\delta)} f_i(x)\,dx =$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[f_i(0)\,\delta^r+\frac{r}{2}f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right]+\sum_{h=1}^{n}\int_{T(\delta)}F_h(x)\,dx\prod_{i=1}^{n}{}^{(h)}\left[f_i(0)\,\delta^r+\frac{r}{2}f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right]$$

$$+\sum\nolimits_{(h,k)}\int_{T(\delta)}F_h(x)\,dx\int_{T(\delta)}F_k(x)\,dx\prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)}\left[f_i(0)\,\delta^r+\frac{r}{2}f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right]+\cdots+\prod_{i=1}^{n}\int_{T(\delta)}F_i(x)\,dx.$$

Se si tien conto della (8), subito si constata che i termini ai secondi membri della (9) e della (10), che seguono, rispettivamente, quelli delle somme

$$\delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}\prod_{i=1}^{n}[f_i(0)+f_i'(0)\,\sigma]\,dx+\delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}\sum_{h=1}^{n}F_h(x)\prod_{i=1}^{n}{}^{(h)}f_i(0)\,dx\,,$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[f_i(0)\,\delta^r+\frac{r}{2}f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right]+\sum_{h=1}^{n}\int_{T(\delta)}F_h(x)\,dx\prod_{i=1}^{n}{}^{(h)}f_i(0)\,\delta^r\,,$$

sono, ciascuno, infinitesimi, con δ, d'ordine superiore a $rn+2$, e quindi possono essere soppressi nel calcolo del limite al primo membro della (7). Questo limite è, pertanto, eguale al seguente

$$(11)\qquad \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{1}{r\delta^{rn+2}}\left|\delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}\prod_{i=1}^{n}[f_i(0)+f_i'(0)\,\sigma]\,dx-\prod_{i=1}^{n}\left[f_i(0)\,\delta^r+\frac{r}{2}f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right]\right|\right\}.$$

Ora si ha:

$$\prod_{i=1}^{n}[f_i(0)+f_i'(0)\,\sigma]=$$

$$\prod_{i=1}^{n}f_i(0)+\sum_{h=1}^{n}f_h'(0)\prod_{i=1}^{n}{}^{(h)}f_i(0)\,\sigma+\sum_{1}^{n}{}_{(h,k)}f_h'(0)f_k'(0)\prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)}f_i(0)\,\sigma^2+A(\sigma)\,\sigma^3\,,$$

e, indicato con A_0 un certo numero positivo,

$$|A(\sigma)|\leqq A_0\,,\qquad \text{per}\quad \delta\leqq\delta_0\,,$$

$$(12)\qquad \delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}\prod_{i=1}^{n}[f_i(0)+f_i'(0)\,\sigma]\,dx=$$

$$\prod_{i=1}^{n}f_i(0)\,\delta^{rn}+\sum_{h=1}^{n}f_h'(0)\prod_{i=1}^{n}{}^{(h)}f_i(0)\,(r,1)\,\delta^{rn+1}$$

$$+\sum_{1}^{n}{}_{(h,k)}f_h'(0)f_k'(0)\prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)}f_i(0)\,(r,2)\,\delta^{rn+2}+\delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}A(\sigma)\,\sigma^3\,dx\,,$$

$$(13)\qquad \left|\delta^{r(n-1)}\int_{T(\delta)}A(\sigma)\,\sigma^3\,dx\right|\leqq(r,3)\,A_0\,\delta^{rn+3}\,,$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left[f_i(0)\,\delta^r + \frac{r}{2} f_i'(0)\,\delta^{r+1}\right] = \tag{14}$$

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(0)\,\delta^{rn} + \frac{r}{2}\sum_{h=1}^{n} f_h'(0) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h)} f_i(0)\,\delta^{rn+1}$$

$$+\frac{r^2}{4}\sum_{1}^{n}{}_{(h,k)} f_h'(0)\, f_k'(0) \prod_{i=1}^{n}{}^{(h,k)} f_i(0)\,\delta^{rn+2} + B(\delta)\,\delta^{rn+3},$$

e, indicato con B_0 un certo numero positivo,

$$|B(\delta)\,\delta^{rn+3}| \leqq B_0\,\delta^{rn+3}, \quad \text{per} \quad \delta \leqq \delta_0 . \tag{15}$$

Osservando che:

$$(r,1) = \frac{r}{2} \quad , \quad (r,2) - \frac{r^2}{4} = \frac{r}{12},$$

le (12), (13), (14) e (15) dimostrano che il limite (11) è precisamente 1/12.