Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Ghizzetti, Alessandro Ossicini

Su un nuovo tipo di sviluppo di una funzione in serie di polinomi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.1-2, p. 21–29.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_1-2_21_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Analisi matematica. — *Su un nuovo tipo di sviluppo di una funzione in serie di polinomi* (*). Nota (**) di ALDO GHIZZETTI ed ALESSANDRO OSSICINI, presentata dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — We consider the sequence of polynomials $P_{s,n}(x)$ having the following property: in the interval $[-1, 1]$ the polynomial $P_{s,n}^{2s+1}$ is orthogonal to polynomials $P_{s,k}$ with $k < n$. Ossicini has already demonstrated the existence of such polynomials.

Other properties of the $P_{s,n}(x)$ are given here. Then a series expansion of the type

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_{s,n}^{2s+1}(x)$$

is associated to every $f(x)$, with certain values of the coefficients c_n that are determined by the property of orthogonality mentioned above.

The Bessel inequality and the Fischer–Riesz theorem are extended to such expansions.

In questa Nota ci proponiamo di esporre alcune proprietà di certi polinomi $P_{s,n}(x)$ recentemente introdotti da A. Ossicini e dipendenti da un parametro intero $s = 0, 1, 2, \cdots$; per $s = 0$ si hanno i polinomi di Legendre (vedi n. 1) (1). Successivamente definiamo un nuovo tipo di sviluppo in serie di una funzione, collegato a tali polinomi con $s > 0$ (vedi n. 2). Nei nn. 3 e 4 sono poi dati due teoremi che costituiscono un primo tentativo di estendere al predetto sviluppo in serie la disuguaglianza di Bessel ed il teorema di Fischer–Riesz validi per gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

1. – Nel lavoro [3] A. Ossicini ha dimostrato che, fissato un intero $s \geq 0$, si può costruire una successione di polinomi $\{P_{s,n}(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$, con $P_{s,n}(x)$ di grado n, in modo da render soddisfatte le relazioni

$$\int_{-1}^{1} U_{n-1}(x)\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx = 0\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.1}$$

ove $U_{n-1}(x)$ designa un arbitrario polinomio di grado $\leq n-1$ (2). Ciascun $P_{s,n}(x)$ è determinato a meno di un fattore costante ed ha i suoi n zeri tutti reali, semplici ed interni all'intervallo $[-1, 1]$. Poiché $P_{s,n}(1) \neq 0$, possiamo supporre i $P_{s,n}(x)$ normalizzati in modo da aversi

$$P_{s,n}(1) = 1\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.2}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Pervenuta all'Accademia il 19 luglio 1967.

(1) I polinomi $P_{s,n}(x)$ derivano da un problema sulle formule di quadratura, già considerato da vari Autori (vedi Bibliografia [2], [3], [4], [5]).

(2) Cioè la potenza, con esponente $2s+1$, di ogni $P_{s,n}(x)$ è ortogonale in $[-1, 1]$ ai polinomi precedenti $P_{s,0}(x), P_{s,1}(x), \cdots, P_{s,n-1}(x)$. Per $s = 0$ si hanno i polinomi di Legendre.

Ricordiamo inoltre che si ha

$$(1.3) \qquad P_{s,2n}(-x) = P_{s,2n}(x) \quad , \quad P_{s,2n+1}(-x) = -P_{s,2n+1}(x) .$$

Aggiungiamo ora le seguenti due nuove proprietà:

I. – *Nell'ipotesi* (1.2) *si ha*

$$(1.4) \qquad \int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+2}(x)\,dx = \frac{2}{1+(2s+2)n} .$$

Dimostrazione. – Con un'integrazione per parti si può scrivere

$$\int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+2}(x)\,dx = [xP_{s,n}^{2s+2}(x)]_{-1}^{1} - (2s+2)\int_{-1}^{1} xP_{s,n}^{2s+1}(x)\,P'_{s,n}(x)\,dx$$

e quindi, tenendo presenti le (1.2), (1.3) ed osservando che $xP'_{s,n}(x) = nP_{s,n}(x) + U_{n-2}(x)$ con $U_{n-2}(x)$ polinomio di grado $n-2$:

$$\int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+2}(x)\,dx = 2-(2s+2)\int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+1}(x)\,[nP_{s,n}(x)+U_{n-2}(x)]\,dx ;$$

ma per la (1.1) questa si riduce alla

$$\int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+2}(x)\,dx = 2-(2s+2)\,n\int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+2}(x)\,dx$$

che equivale alla (1.4).

II. – *Nell'intervallo* $[-1, 1]$ *le funzioni* $|P_{s,n}(x)|$ *assumono il loro massimo valore nei punti estremi*; *si ha cioè*, *ricordando* (1,2) e (1,3):

$$(1.5) \qquad |P_{s,n}(x)| < 1 , \qquad (-1 < x < 1) .$$

Dimostrazione. – Indichiamo con $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ gli zeri di $P_{s,n}(x)$, scrivendo quindi (con p costante):

$$P_{s,n}(x) = p\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) .$$

Introduciamo poi i seguenti polinomi:

$$(1.6) \qquad A_\nu(x) = \prod_{i=1}^{\nu}(x-x_i)^{2s+2} \quad , \quad B_\nu(x) = \prod_{i=\nu+1}^{n}(x-x_i)^{s+1} ,$$

$$(\nu = 0 , 1 , \cdots , n)\ ^{(3)},$$

(3) Coll'intesa che $A_0(x) = 1$, $B_n(x) = 1$; basta fare la convenzione di sostituire con 1 ogni simbolo del tipo $\prod_{i=\alpha+1}^{\alpha} \cdots$.

osservando che, comunque si fissi l'indice ν, si può scrivere

$$P_{s,n}^{2s+2}(x) = p^{2s+2} A_\nu(x) B_\nu^2(x). \tag{1.7}$$

Si vede immediatamente che sussistono le

$$A_\nu(x) > 0 \quad , \quad A'_\nu(x) > 0 \qquad \text{per } x > x_\nu , \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n), \tag{1.8}$$

$$B_\nu(x)\, B'_\nu(x) < 0 \qquad \text{per } x < x_{\nu+1} , \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{1.9}$$

mentre possiamo facilmente dimostrare che

$$\int_{-1}^{1} A_\nu(x)\, B_\nu(x)\, B'_\nu(x)\, dx = 0 , \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n). \tag{1.10}$$

Per $\nu = n$ la (1.10) è evidente [perché $B'_n(x) = 0$]; supponiamo dunque $0 \leq \nu \leq n - 1$ e, tenendo conto di (1.6), scriviamo

$$\int_{-1}^{1} A_\nu(x)\, B_\nu(x)\, B'_\nu(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \prod_{i=1}^{\nu} (x - x_i)^{2s+2} \cdot \prod_{i=\nu+1}^{n} (x - x_i)^{s+1} \cdot$$

$$\cdot (s + 1) \prod_{i=\nu+1}^{n} (x - x_i)^s \cdot \frac{d}{dx} \prod_{i=\nu+1}^{n} (x - x_i)\, dx =$$

$$= \frac{s+1}{p^{2s+1}} \int_{-1}^{1} P_{s,n}^{2s+1}(x)\, U_{n-1}(x)\, dx ,$$

avendo introdotto il polinomio $U_{n-1}(x) = \prod_{i=1}^{\nu} (x - x_i) \cdot \frac{d}{dx} \prod_{i=\nu+1}^{n} (x - x_i)$ di grado $n-1$. Per la (1.1) l'ultimo integrale scritto vale zero e ne segue la (1.10).

Ciò premesso, osserviamo che per la (1.7) si ha

$$\frac{1}{p^{2s+2}} [P_{s,n}^{2s+2}(1) - P_{s,n}^{2s+2}(x)] = A_\nu(1)\, B_\nu^2(1) - A_\nu(x)\, B_\nu^2(x) =$$

$$= \int_x^1 \frac{d}{dt} [A_\nu(t)\, B_\nu^2(t)]\, dt = 2 \int_x^1 A_\nu(t)\, B_\nu(t)\, B'_\nu(t)\, dt + \int_x^1 A'_\nu(t)\, B_\nu^2(t)\, dt ,$$

ovvero, in virtù di (1.10)

$$\frac{1}{p^{2s+2}} [P_{s,n}^{2s+2}(1) - P_{s,n}^{2s+2}(x)] = -2 \int_{-1}^{x} A_\nu(t)\, B_\nu(t)\, B'_\nu(t)\, dt + \tag{1.11}$$

$$+ \int_x^1 A'_\nu(t)\, B_\nu^2(t)\, dt , \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n) .$$

Teniamo presente che in questa formula manca il primo integrale se $\nu = n$, manca il secondo se $\nu = 0$.

La tesi (1.5) del teorema sarà provata se facciamo vedere che per $-1 < x < 1$ il primo membro di (1.11) è positivo. Esso intanto vale $1/p^{2s+2}$ nei punti $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Inoltre, se $-1 < x < x_1$, il secondo membro di (1.11) *scritto con* $\nu = 0$ diventa $-2\int_{-1}^{x} B_0(t)\, B_0'(t)\, dt$ ed è positivo in virtù di (1.9) (con $\nu = 0$). Se invece $x_\nu < x < x_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n-1)$ il secondo membro di (1.11) *scritto col* ν *considerato* è evidentemente positivo a causa di (1.8) e (1.9). Infine, se $x_n < x < 1$, il secondo membro di (1.11) *scritto con* $\nu = n$ diventa $\int_{x}^{1} A_n'(t)\, dt$ ed è ancora positivo, come segue da (1.8) (con $\nu = n$).

2. – La successione di polinomi $\{P_{s,n}(x)\}_{n=0,1,2,\cdots}$ considerata nel n. 1 (in corrispondenza ad un fissato intero $s \geq 0$) [4] permette di collegare *formalmente* ad ogni funzione $f(x)$ *sommabile in* $[-1, 1]$ un certo sviluppo in serie di polinomi, che per $s = 0$ coincide con quello in serie di polinomi di Legendre. Precisamente, posto

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\,, \tag{2.1}$$

si deduce, per ogni fissato $k = 0, 1, 2, \cdots$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_{s,k}(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^{1} P_{s,k}(x)\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx\,;$$

ma per la (1.1) questi ultimi integrali sono nulli per $n > k$ e perciò rimane

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_{s,k}(x)\, dx = \sum_{n=0}^{k} c_n \int_{-1}^{1} P_{s,k}(x)\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx\,,$$

ovvero, ricordando (1.4):

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, P_{s,k}(x)\, dx = \sum_{n=0}^{k-1} c_n \int_{-1}^{1} P_{s,k}(x)\, P_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx + \frac{2}{1+(2s+2)k}\, c_k\,, \tag{2.2}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots)\,.$$

Si ha così un sistema di infinite equazioni lineari nei coefficienti c_k, con matrice diagonale, che individua per ricorrenza tali coefficienti.

(4) Si noti che, per ogni s, si ha $P_{s,0}(x) = 1$, $P_{s,1}(x) = x$.

Associando alla funzione $f(x)$ la successione $\{a_k\}$ così definita

$$(2.3)\qquad a_k = \frac{1+(2s+2)k}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{P}_{s,k}(x)\, dx\,, \qquad (k=0,1,2,\cdots),$$

ed al sistema $\{\mathrm{P}_{s,n}(x)\}$ le costanti $\mathrm{I}_{s,k,n}$ date da

$$(2.4)\qquad \mathrm{I}_{s,k,n} = \frac{1+(2s+2)k}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{s,k}(x)\, \mathrm{P}_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx\,,$$

$$(k=1,2,\cdots;\ n=0,1,\cdots,k)\ ^{(5)},$$

le (2.2) danno luogo alle seguenti formule di ricorrenza

$$(2.5)\qquad c_0 = a_0 \quad ; \quad c_k = a_k - \sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{I}_{s,k,n}\, c_n\,, \qquad (k=1,2,\cdots).$$

Si noti che, per le (1,3), la (2.4) fornisce

$$(2.6)\qquad \mathrm{I}_{s,k,n} = 0 \quad (\text{se } k-n \text{ è dispari})\,;$$

$$= [1+(2s+2)k]\int_{0}^{1} \mathrm{P}_{s,k}(x)\, \mathrm{P}_{s,n}^{2s+1}(x)\, dx \quad (\text{se } k-n \text{ è pari}),$$

onde le (2.5) possono anche scriversi (con $k=1,2,\cdots$):

$$(2.7)\qquad \begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_{2k} = a_{2k} - \displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{I}_{s,2k,2n}\, c_{2n} \end{cases} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} c_1 = a_1 \\ c_{2k+1} = a_{2k+1} - \displaystyle\sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{I}_{s,2k+1,2n+1}\, c_{2n+1}\,. \end{matrix}$$

Si noti che, se $f(x)$ è funzione pari (dispari), nella (2.1) risultano nulli tutti i c_k con indice dispari (pari).

Nel caso $s=0$ le formule precedenti si riducono a quelle classiche relative agli sviluppi in serie di polinomi di Legendre (nelle quali $c_k = a_k$).

La serie (2.1) sarà chiamata la s – *serie di Legendre* relativa alla $f(x)$ ed i coefficienti c_k definiti da (2.5) [assieme a (2.3), (2.4)] gli *s–coefficienti di Legendre* della $f(x)$.

Osserviamo il seguente teorema:

I. – *Se gli s–coefficienti di Legendre di una $f(x)$ sono tutti nulli, allora la $f(x)$ è quasi ovunque nulla in* $[-1, 1]$.

Dimostrazione. – Infatti da $c_k = 0$ $(k=0,1,2,\cdots)$ segue per (2.5) $a_k = 0$ $(k=0,1,2,\cdots)$; allora dalla (2.3) si trae che sono nulli tutti i momenti della $f(x)$ sull'intervallo finito $[-1, 1]$ e quindi la tesi.

(5) È ovvio che risulta $\mathrm{I}_{s,k,k} = 1$.

3. – In questo n. e nel successivo, con riferimento alle $f(x)$ definite in $[-1, 1]$, considereremo una particolare coppia di spazi funzionali associati L^p e L^q $\left(\text{con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, assumendo

$$(3.1) \qquad p = \frac{2s+2}{2s+1} > 1 \quad , \quad q = 2s+2$$

ed osservando che la (1.4) equivale alla

$$(3.2) \qquad \|P_{s,n}\|_q = \left(\frac{2}{1+qn}\right)^{1/q}.$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

I. – *Nell'ipotesi* $f(x) \in L^p$, *gli s–coefficienti di Legendre* c_n *della* $f(x)$, *o meglio i corrispondenti coefficienti* a_n [6], *sono tali da verificare, per ogni fissato* $\sigma > 0$, *le seguenti due disuguaglianze*

$$(3.3) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma}}\right|^p\right)^{1/p} \leq A(\sigma)\,\|f\|_p\,,$$

$$(3.4) \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{a_n}{(1+qn)^{1+\sigma}}\right|^q\right)^{1/q} \leq B(\sigma)\,\|f\|_p\,,$$

ove si è posto

$$(3.5) \qquad A(\sigma) = 2^{-1/p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+qn)^{1+p\sigma}}\right)^{1/p} \quad , \quad B(\sigma) = 2^{-1/p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+qn)^{1+q\sigma}}\right)^{1/q}.$$

Dimostrazione. – Ricordando (2.3) e facendo uso della disuguaglianza di Hölder, possiamo scrivere

$$\left|\frac{a_n}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma}}\right| = \frac{1}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma}} \frac{1+qn}{2} \left|\int_{-1}^{1} f(x)\, P_{s,n}(x)\, dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{1}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma-1}} \|f\|_p \, \|P_{s,n}\|_q$$

e quindi per la (3.2)

$$(3.6) \qquad \left|\frac{a_n}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma}}\right| \leq 2^{(1/q)-1} \frac{1}{(1+qn)^{(2/p)+(1/q)+\sigma-1}} \|f\|_p\,;$$

ma $\frac{1}{q} - 1 = -\frac{1}{p}$, $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} + \sigma - 1 = \frac{1}{p} + \sigma$ e perciò

$$\left|\frac{a_n}{(1+qn)^{(2/p)+\sigma}}\right|^p \leq \frac{1}{2} \frac{1}{(1+qn)^{1+p\sigma}} \|f\|_p^p$$

(6) Definiti dalle (2.3). Si tenga presente che a_n è una combinazione lineare [a coefficienti indipendenti da $f(x)$] di $c_0, c_1, \cdots, c_n$, come mostra la (2.5).

donde la convergenza della serie indicata a primo membro di (3.3) ed il sussistere della (3.3) stessa.

In modo del tutto analogo si dimostra la (3.4); ci limiteremo ad osservare che la (3.6) vien sostituita dalla

$$\left| \frac{a_n}{(1+qn)^{1+\sigma}} \right| \leq 2^{(1/q)-1} \frac{1}{(1+qn)^{(1/q)+\sigma}} \| f \|_p \, .$$

4. – Cominciamo coll'osservare che dalla

$$\| P_{s,n}^{2s+1} \|_q = \| P_{s,n}^{q-1} \|_q = \left(\int_{-1}^{1} P_{s,n}^q(x) \, P_{s,n}^{q(q-2)}(x) \, dx \right)^{1/q}$$

si ricava, tenendo conto di (1.5) e (3.2):

$$\| P_{s,n}^{2s+1} \|_q < \left(\int_{-1}^{1} P_{s,n}^q(x) \, dx \right)^{1/q} = \left(\frac{2}{1+qn} \right)^{1/q} . \tag{4.1}$$

I. – *Sia data una successione di numeri* $\{c_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ *la quale goda della seguente proprietà: esiste un* $\sigma > 0$ *tale da far risultare*

$$\sum_{n=0}^{\infty} | (1+qn)^\sigma c_n |^p < +\infty , \tag{4.2}$$

oppure

$$\sum_{n=0}^{\infty} | (1+qn)^{(1/p)-(1/q)+\sigma} c_n |^q < +\infty . \tag{4.3}$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \, P_{s,n}^{2s+1}(x) \tag{4.4}$$

è la s–serie di Legendre di una $f(x) \in L^q$ *e converge, nello spazio* L^q, *verso la* $f(x)$ *stessa.*

Dimostrazione. – Cominciamo a dimostrare la convergenza nello spazio L^q della serie (4.4). Per ogni coppia di interi M, N (con $0 \leq M < N$) poniamo

$$f_{MN}(x) = \sum_{n=M}^{N} c_n \, P_{s,n}^{2s+1}(x)$$

ed osserviamo che per la (4.1) si ha

$$\| f_{MN} \|_q \leq \sum_{n=M}^{N} |c_n| \, \| P_{s,n}^{2s+1}(x) \|_q < \sum_{n=M}^{N} |c_n| \left(\frac{2}{1+qn} \right)^{1/q} .$$

Se è verificata l'ipotesi (4.2), proseguiamo la maggiorazione nel modo seguente

$$\|f_{\mathrm{MN}}\|_q < 2^{1/q} \sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^\sigma c_n| \frac{1}{(1+qn)^{(1/q)+\sigma}} \leq$$

$$\leq 2^{1/q} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^\sigma c_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(1+qn)^{1+q\sigma}} \right)^{1/q},$$

arrivando così alla

$$\|f_{\mathrm{MN}}\|_q < \mathrm{C} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^\sigma c_n|^p \right)^{1/p} \quad \text{con} \quad \mathrm{C} = 2^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+qn)^{1+q\sigma}} \right)^{1/q}. \tag{4.5}$$

Se invece è verificata la (4.3) conviene scrivere

$$\|f_{\mathrm{MN}}\|_q < 2^{1/q} \sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^{(1/p)-(1/q)+\sigma} c_n| \frac{1}{(1+qn)^{(1/p)+\sigma}} \leq$$

$$\leq 2^{1/q} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^{(1/p)-(1/q)+\sigma} c_n|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(1+qn)^{1+p\sigma}} \right)^{1/p}$$

e quindi

$$\|f_{\mathrm{MN}}\|_q < \mathrm{D} \left(\sum_{n=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} |(1+qn)^{(1/p)-(1/q)+\sigma} c_n|^q \right)^{1/q} \quad \text{con} \quad \mathrm{D} = 2^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+qn)^{1+p\sigma}} \right)^{1/p}. \tag{4.6}$$

Da (4.2), (4.5) [oppure da (4.3), (4.6)] segue immediatamente che, nello spazio L^q (completo), la serie (4.4) verifica la condizione di Cauchy, onde essa converge verso una certa funzione $f(x) \in \mathrm{L}^q$; si ha cioè

$$\lim_{\mathrm{N} \to \infty} \|f - f_{0\mathrm{N}}\|_q = 0. \tag{4.7}$$

Rimane da far vedere che tale $f(x)$ ha come s–coefficienti di Legendre proprio i numeri c_n. Ricordando (2.3) e (2.4) si vede che questa tesi si trasforma subito in quest'altra

$$\frac{1+qk}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{P}_{s,k}(x)\, dx = a_k \quad \text{con} \quad a_k = \sum_{n=0}^{k} \mathrm{I}_{s,k,n}\, c_n. \tag{4.8}$$

Per provare la (4.8) osserviamo che, *supponendo già* $\mathrm{N} > k$, si può scrivere

$$\frac{1+qk}{2} \int_{-1}^{1} f_{0\mathrm{N}}(x)\, \mathrm{P}_{s,k}(x)\, dx = \frac{1+qk}{2} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} c_n \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{s,n}^{2s+1}(x)\, \mathrm{P}_{s,k}(x)\, dx =$$

$$= [\text{per } (1.1), (2.4)] = \sum_{n=0}^{k} c_n\, \mathrm{I}_{s,k,n} = a_k;$$

ciò esprime che

$$a_k = \lim_{N \to \infty} \frac{1 + qk}{2} \int_{-1}^{1} f_{0N}(x) \, P_{s,k}(x) \, dx \,,$$

cosicché la (4.8) può anche scriversi

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-1}^{1} [f(x) - f_{0N}(x)] \, P_{s,k}(x) \, dx = 0 \,. \tag{4.9}$$

Ma questa è conseguenza immediata della (4.7) perché si ha

$$\left| \int_{-1}^{1} [f(x) - f_{0N}(x)] \, P_{s,k}(x) \, dx \right| \leq \| f - f_{0N} \|_q \, \| P_{s,k} \|_p \,.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] BARY N. K., *A Treatise on trigonometric series*, vol. 1, 2, Pergamon Press, New-York 1964.

[2] GHIZZETTI A., *Sulle formule di quadratura*, « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. XXVI (1954–55).

[3] OSSICINI A., *Costruzione di formule di quadratura di tipo Gaussiano*, « Annali di Matematica pura ed Applicata », vol. LXXII (1966).

[4] POPOVICIU T., *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss* « Acc. R.P.R. filiala IASI, Studii si cesc. Stiint », An. VI, n. 1–2 (1955).

[5] TURAN P., *On the theory of the mechanical quadrature*, « Acta Scient. Mathem.», XII (1950).