Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Tognoli

Sulla classificazione dei fibrati analitici reali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.1-2, p. 18–20.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_1-2_18_0>

Matematica. — *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali* (*). Nota (**) di ALBERTO TOGNOLI, presentata dal Corrisp. G. ZAPPA.

RÉSUMÉ. — H. Grauert a prouvé que la classification des fibrés holomorphes sur un espace de Stein est equivalent à la classification des fibrés continues.

Le problème se pose de voir si le même résultat vaut pour le fibrés principaux analytiques réels sur un espace analytique réel.

Nous avons prouvé le résultat suivant: si L* est un groupe de Lie, sous-groupe d'un groupe de Lie connexe et V est espace analytique réel coherent, dont chaque composante connexe a dimension finie, la classification des fibrés principaux analytiques sur V, avec groupe L*, est équivalent à la classification des fibrés topologiques sur V (dont le groupe structural est L*).

Sia V uno spazio analitico, reale o complesso, e sia L* un gruppo di Lie. Indicheremo con $\mathcal{B}_c(V, L^*)$, $\mathcal{B}_a(V, L^*)$ la famiglia delle classi di fibrati principali topologici, rispettivamente analitici, aventi V come base ed L* come gruppo strutturale.

Siano $\mathcal{H}_c(L^*)$, $\mathcal{H}_a(L^*)$ i fasci dei germi delle applicazioni continue, rispettivamente analitiche, di V in L*.

È noto che si hanno delle applicazioni naturali biunivoche

$$i_c : H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*)) \to \mathcal{B}_c(V, L^*)$$

$$i_a : H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) \to \mathcal{B}_a(V, L^*) .$$

Inoltre, l'inclusione $\mathcal{H}_a(L^*) \to \mathcal{H}_c(L^*)$ induce un omomorfismo $\vartheta : H^1(V, \mathcal{H}_a(L^*)) \to H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*))$.

L'iniettività di ϑ equivale dunque a dire che due fibrati analitici sono topologicamente equivalenti se, e soltanto se, lo sono analiticamente.

La surgettività di ϑ equivale all'affermazione che ogni fibrato principale topologico è topologicamente equivalente ad un fibrato analitico.

H. Grauert (vedi [3], [4], [5], ha stabilito la bigettività di ϑ nel caso in cui V sia uno spazio di Stein ed L* un gruppo di Lie complesso.

D'altra parte segue dai risultati di H. Cartan (vedi [1]), la bigettività di ϑ se V è una varietà analitica reale ed L* è un gruppo di Lie abeliano. H. Cartan pone, in [1], il problema di studiare la bigettività di ϑ (quando V è uno spazio analitico reale) nel caso in cui L* non sia abeliano.

Sia L* un gruppo di Lie reale; diremo che L* soddisfa la condizione *a*) se esso è sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie connesso (osserviamo che tale ipotesi è soddisfatta da ogni sottogruppo di Lie di un gruppo di matrici).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato per la matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1967.

In un lavoro in preparazione abbiamo provato il seguente:

TEOREMA 1. – *Se* L^* *è un gruppo di Lie qualunque e se* V *è uno spazio analitico reale coerente ogni componente connessa del quale ha dimensione finita* ϑ *è iniettiva.*

Se inoltre L^* *soddisfa la condizione* a) ϑ *è bigettiva.*

Ecco un breve cenno della dimostrazione del teorema 1.

Se L^* è un gruppo di Lie reale, diremo complessificato di L^* un gruppo di Lie complesso $\tilde{L}^*$, contenente L^* come sottogruppo chiuso e tale che l'algebra di Lie di $\tilde{L}^*$ sia la complessificata dell'algebra di Lie di L^*. In [8] G. Tomassini ha stabilito nuovi criteri perché un gruppo di Lie possa essere complessificato. Tali criteri trovano applicazione nella dimostrazione del teorema 1.

Sia V uno spazio analitico reale coerente ed $F \xrightarrow{\pi} V$ un fibrato principale di gruppo strutturale L^*. Se L^* è complessificabile è possibile definire un complessificato $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{V}$ di F.

Abbiamo stabilito l'iniettività di θ sviluppando lo schema logico seguente:

1° nel caso in cui L^* sia complessificabile si dimostra che, se F è topologicamente banale, esiste un complessificato $\tilde{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{V}$ topologicamente banale.

2° V ha in $\tilde{V}$ un sistema fondamentale di intorni che sono spazi di Stein. In virtù dei risultati di H. Grauert, esiste pertanto un complessificato $\tilde{F}'$ di F che è olomorficamente banale. Da ciò segue facilmente che F è analiticamente banale.

3° In base a risultati di H. Cartan e di J. Frenkel (vedi [2]) si prova infine l'iniettività di θ per ogni gruppo di Lie L^*.

La surgettività di θ discende dalle seguenti considerazioni.

Sia V uno spazio analitico reale coerente di dimensione finita ed X una varietà analitica reale.

Sia $\pi(V, X)$ l'insieme delle classi di omotopia delle applicazioni continue di V in X.

Indichiamo con $\pi_a(V, X)$ l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni analitiche di V in X ottenute identificando due applicazioni analitiche f, g quando esiste un'applicazione continua $\varphi : V \times I \to X$ tale che $\varphi_{|t=0} = f$, $\varphi_{|t=1} = g$ e che $\varphi_{|t}$ sia analitica per ogni $t \in [0, 1]$.

Dai teoremi di immersione provati in [7] e dal teorema di approssimazione di H. Whitney (vedi [9]) discende intanto il

TEOREMA 2. – *L'applicazione naturale* $\eta : \pi_a(V, X) \to \pi(V, X)$ *è bigettiva.*

Ricordiamo che, dato un gruppo di Lie L^* compatto, ed un numero positivo n, esistono due varietà analitiche B_n, X_n, una fibrazione analitica $B_n \xrightarrow{\pi_n} X_n$ e, per ogni spazio analitico reale V di dimensione n una bigezione:

$$j : \pi(V, X_n) \to H^1(V, \mathcal{H}_c(L^*)) .$$

Per il teorema 2 ogni classe $\{f\} \in \pi(V, X_n)$ ha una rappresentante f che è un'applicazione analitica. Si verifica che $j(f)$ corrisponde ad un fibrato analitico e questo prova la surgettività di ϑ.

Elenchiamo infine alcune conseguenze del teorema 1.

Sia V uno spazio analitico reale coerente ogni cui componente connessa abbia dimensione finita, e sia L^* un gruppo di Lie soddisfacente la condizione *a*).

In queste ipotesi per ogni fibrato analitico principale F di base V e gruppo strutturale L^* valgono i fatti seguenti:

i) F ha una sezione continua se, e solo se, F ha una sezione analitica (e quindi F è analiticamente banale se L^* è contrattile).

ii) se L^* si può ridurre (topologicamente), nel fibrato F, al sottogruppo chiuso $\hat{L}^*$, L^* si può ridurre analiticamente ad $\hat{L}^*$,

iii) se lo spazio V è contrattile sul sottospazio analitico reale coerente V', ogni fibrato analitico principale, con gruppo strutturale L^* su V' è restrizione di un fibrato analitico principale su V determinato univocamente (a meno di isomorfismi analitici).

Quindi se V è contrattile ogni fibrato analitico su V è analiticamente banale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. CARTAN, *Variétés analytiques réel et variétés analytiques complexes*, « Bull. Soc. Math. France », *85*, pp. 77–100 (1957).

[2] J. FRENKEL, *Cohomologie non abelienne et expaces fibrés*, « Bull. Soc. Math. France », *85*, pp. 136–220 (1957).

[3] H. GRAUERT, *Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Räumen*, « Math. Annalen », *133*, pp. 139–159 (1957).

[4] H. GRAUERT, *Holomorphe Funktionen mit Werten in Komplexen Lieschen Gruppen*, « Math. Annalen », *133*, pp. 450–472 (1957).

[5] H. GRAUERT, *Analytische Faserungen uber holomorph–vollstandingen Räumen*, « Math. Annalen », *135*, pp. 263–273 (1958).

[6] A. TOGNOLI, *Proprietà globali degli spazi analitici reali*, « Annali di Matematica », *75*, pp. 143–218 (1967).

[7] A. TOGNOLI–G. TOMASSINI, *Teoremi di immersione degli spazi analitici reali*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa » (in corso di stampa).

[8] G. TOMASSINI, *Complessificazione di un gruppo di Lie reale* (in preparazione).

[9] H. WHITNEY, *Analytic extension of differentiable functions defined on closed sets*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *36*, pp. 63–89 (1934).