
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

TUDOR ZAMFIRESCO

Sur les familles continues de courbes. Nota II

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.1-2, p. 13-17.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_1-2_13_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les familles continues de courbes.* Nota II di TUDOR ZAMFIRESCO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa Nota viene proseguito uno studio sulla struttura delle famiglie continue secondo Grünbaum di curve. Data una tal famiglia \mathcal{Q} , detto $M_n(\mathcal{Q})$ l'insieme dei punti per i quali passano almeno n curve della famiglia e supposto che l'intersezione degli insiemi $M_n(\mathcal{Q})$ sia vuota, viene dimostrato che nella famiglia esiste al massimo una curva L siffatta, che per ogni punto interno ai sottoarchi di L riempiti da $M_2(\mathcal{Q})$ passano esattamente 4 curve della famiglia.

Rappelons d'abord que la notion de famille continue de courbes est due à M. B. Grünbaum, qui l'a introduit dans un travail récent en liaison avec l'étude faite par plusieurs auteurs sur quelques familles de segments de droite attachées à un corps convexe plan. Une définition peut être trouvée dans ce travail [1] de M. B. Grünbaum, ou bien dans ma note I sur le même sujet [3], où je l'avais rappelée.

Notations: \mathcal{Q} sera toujours une famille continue de courbes ayant les extrémités sur la courbe de Jordan fermée C . $L(p)$ est la courbe de \mathcal{Q} qui a p comme une extrémité. Le point $-p$ et l'extrémité de $L(p)$ différente de p . $M_n(\mathcal{Q})$ désigne l'ensemble des points par lesquels passent au moins n courbes de L .

Maintenant, voici quelques résultats:

Sur toutes les courbes de la famille \mathcal{Q} , avec une exception au plus, il y a un point de $M_3(\mathcal{Q})$.

Ce théorème est du à M. B. Grünbaum [1]. Il est complété par le suivant, contenu dans la note I:

Sur toutes les courbes de la famille \mathcal{Q} , avec trois exceptions au plus, il y a un continu formé de \mathcal{Q} points de $M_3(\mathcal{Q})$ (si l'on suppose qu'il n'y a pas de point commun à toutes les courbes de \mathcal{Q}).

Dans la présente note nous voulons trouver le nombre maximum de courbes L_i de la famille \mathcal{Q} , telles que par chaque point intérieur (sur L_i) à $L_i \cap M_2(\mathcal{Q})$ passent exactement quatre courbes de \mathcal{Q} . A savoir nous démontrerons à la fin d'une suite de lemmes le suivant résultat:

Si $M_\infty(\mathcal{Q}) = \emptyset$, alors sur une courbe $L \in \mathcal{Q}$ au plus, $\text{int}(L \cap M_2(\mathcal{Q})) = L \cap M_4(\mathcal{Q}) - M_5(\mathcal{Q})$.

Il est bon de remarquer que le résultat ci-dessus continue les investigations sur les relations réciproques entre \mathcal{Q} et les ensembles $M_n(\mathcal{Q})$. Pour d'autres propriétés des ensembles $M_n(\mathcal{Q})$, voir [1] et [2].

Nous sommes conduits à une succincte étude des fonctions continues dont tous les ensembles de niveau (sauf les niveaux extrêmes, s'ils existent) ont la cardinalité 3.

(*) Nella seduta del 21 giugno 1967.

Soit

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue bornée telle que pour chaque $\lambda \in \text{int } f((a, b))$ on ait $\text{card } f^{-1}(\lambda) = 3$, et pour chaque $\mu \in \text{fr } f((a, b))$, on ait $\text{card } f^{-1}(\mu) < \aleph_0$.

LEMMA 1. - *La fonction f a des limites dans a et b .*

Démonstration. - Puisque f est bornée, $\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$ sont finies. Supposons qu'elles ne sont pas égales; soit alors

$$u \in (\liminf_{x \rightarrow a} f(x), \limsup_{x \rightarrow a} f(x)).$$

En vertu de la propriété de Darboux, $\text{card } f^{-1}(u) \geq \aleph_0$, absurde.

LEMMA 2. - *Tout point $x \in (a, b)$ est un extrêimum relatif stricte des restrictions de la fonction f aux intervalles (a, x) et $[x, b)$.*

Démonstration. - Supposons le contraire à l'égard de $f|_{(a, x)}$; alors, dans l'intervalle (a, x) il y a deux points c_1, c_2 tels que $f(c_1) \leq f(x)$ et $f(c_2) \geq f(x)$, dans l'intervalle $(\max\{c_1, c_2\}, x)$ il y a deux autres points c_3, c_4 tels que $f(c_3) \leq f(x)$ et $f(c_4) \geq f(x)$, etc. Par conséquent, dans chacun des intervalles $[c_1, c_2], [c_3, c_4], \dots$ il y a un point y_i tel que $f(y_i) = f(x)$, d'où $\text{card } f^{-1}(f(x)) \geq \aleph_0$, absurde.

Appelons point du type $(+, +)$ (resp. $(+, -), (-, +), (-, -)$) tout point x de (a, b) tel que x soit un maximum (resp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f|_{(a, x]}$ et, simultanément, un maximum (resp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f|_{[x, b)}$ et soit $[+, +)$ (resp. $[+, -),$ etc) la classe des points du type $(+, +)$ (resp. $(+, -),$ etc).

LEMMA 3. - *Si $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ et $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \in \text{int } f((a, b))$, alors se présente l'une des situations suivantes:*

- 1) $x_1 \in [+, -]$, $x_2 \in [-, +]$, $x_3 \in [+, -]$;
- 2) $x_1 \in [-, +]$, $x_2 \in [+, -]$, $x_3 \in [-, +]$;
- 3) $x_1 \in [+, +]$, $x_2 \in [+, -]$, $x_3 \in [-, -]$;
- 4) $x_1 \in [-, -]$, $x_2 \in [-, +]$, $x_3 \in [+, +]$.

Démonstration. - Puisque le deuxième signe de la classe à laquelle appartient l'un des trois points coïncide au premier signe de la classe à laquelle appartient le point suivant, on peut se présenter seulement 2^4 situations. Toutes les 12 situations qui ne figurent pas dans l'énoncé sont en fait impossibles parce que pour tout point $\lambda \in \text{int } f((a, b))$, $\text{card } f^{-1}(\lambda) = 3$. En effet, supposons par exemple que $x_1 \in [+, +], x_2 \in [+, -], x_3 \in [-, +]$. Alors, soient $y_1 \in (a, x_1), y_2 \in (x_1, x_2), y_3 \in (x_3, b)$ tels que

$$y = \max \{f(y_1), f(y_2), f(y_3)\} < f(x_1).$$

Evidemment, si $z \in (y, f(x_1))$, alors $z \in \text{int } f((a, b))$. Mais en vertu de la propriété de Darboux, $f^{-1}(z) \geq 4$, absurde.

LEMME 4. — Soit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \inf f((a, b))$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \sup f((a, b))$, soit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sup f((a, b))$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \inf f((a, b))$.

Démonstration. — Soient $\lambda \in \text{int } f((a, b))$ et $x_1 < x_2 < x_3$ les trois points de $f^{-1}(\lambda)$. Suivant le lemme 3, le premier signe de la classe de x_1 et le deuxième signe de la classe de x_3 ne coïncident pas, d'où il suit que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lambda \leq \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \leq \lambda \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

quelque soit le point λ .

Donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ forment la frontière de $f((a, b))$.

Les lemmes 1 et 4 ne seront pas utilisés dans la suite et ont été établis seulement pour leur intérêt qui sera mieux compris lorsqu'on verra la liaison avec la structure de \mathfrak{L} .

LEMME 5. — Si $\mu \in \text{fr } f((a, b))$, alors $\text{card } f^{-1}(\mu) \leq 1$.

Démonstration. — Supposons qu'il y a deux points différents x_1, x_2 dans $f^{-1}(\mu)$; alors, naturellement, $x_1, x_2 \in [+, +]$ ou $x_1, x_2 \in [-, -]$. On voit alors aisément qu'on peut trouver un intervalle $I \subset \text{int } f((a, b))$ ayant une extrémité dans μ , tel que $f^{-1}(\lambda)$ ait au moins quatre points différents, pour tout $\lambda \in I$, absurde.

Revenons maintenant au problème annoncé concernant la famille continue de courbes \mathfrak{L} .

Soit $L(p)$ une courbe de \mathfrak{L} telle que

$$\text{int } (L(p) \cap M_2(\mathfrak{L})) = L(p) \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L}).$$

Il est facile d'établir la possibilité de l'existence d'une telle courbe dans \mathfrak{L} . Désignons par A l'un des deux arcs de C ayant les extrémités p et $-p$. Soient

$$\varphi : [a, b] \rightarrow A \quad , \quad \psi : [c, d] \rightarrow L(p)$$

deux homéomorphismes réalisant des représentations paramétriques des arcs A et $L(p)$. Evidemment l'application

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d)$$

définie par $f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$ est continue.

L'ensemble $\psi^{-1}(L(p) \cap M_2(\mathfrak{L}))$ coïncide à $f((a, b))$ et

$$\psi^{-1}(L(p) \cap M_4(\mathfrak{L}) - M_5(\mathfrak{L})) = \{\lambda \in f((a, b)) : \text{card } f^{-1}(\lambda) = 3\}.$$

En ajoutant ici que $M_\infty(\mathfrak{L}) = \emptyset$, il s'ensuit que la fonction f appartient au type étudié et les résultats des lemmes précédents seront applicables.

LEMME 6. - Si L est une courbe différente de $L(p)$ intersectant $L(p) \cap M_4(\mathfrak{S}) - M_5(\mathfrak{S})$, alors $L \cap M_5(\mathfrak{S}) \neq \emptyset$.

Démonstration. - Soit $\varphi(x_1)$ l'extrémité de L située sur A . Alors il y a encore deux points $x_2, x_3 \in (a, b)$ tels que

$$L(\varphi(x_2)) \cap L(\varphi(x_3)) \cap L \cap L(p) \neq \emptyset.$$

Supposons que $x_1 < x_2 < x_3$ (les autres cas sont analogues). D'après le lemme 3, quatre situations sont possibles en ce qui concerne les classes auxquelles appartiennent x_1, x_2, x_3 . Nous allons considérer seulement le cas 1) de l'énoncé du lemme cité, car les autres sont similaires.

Soit z le point de concurrence des quatre courbes et supposons par exemple que $\varphi(a) = \psi(c) = p, \varphi(b) = \psi(d) = -p$.

Il y a trois points $y_1 \in (a, x_1), y_2 \in (x_1, x_2), y_3 \in (x_3, b)$ tels que $L(p) \cap L(\varphi(y_1))$ soit entre p et z sur $L(p), L(p) \cap L(\varphi(y_2))$ et $L(p) \cap L(\varphi(y_3))$ soient entre z et $-p$ sur $L(p)$. Alors $L \cap L(\varphi(y_1)), L \cap L(\varphi(y_2))$ et $L \cap L(\varphi(y_3))$ se trouvent entre z et $-\varphi(x_1)$ sur L .

Soit z' un point de L situé simultanément entre z et $L \cap L(\varphi(y_i))$ ($i = 1, 2, 3$). D'après le lemme 1 de [1], il s'ensuit qu'il y a quatre points $p_1 \in (a, y_1), p_2 \in (y_2, x_2), p_3 \in (x_3, y_3), p_4 \in (y_3, b)$, tels que $z' \in L(\varphi(p_i))$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Donc $z' \in L \cap M_5(\mathfrak{S})$.

LEMME 7. - Si L est une courbe différente de $L(p)$ intersectant $\text{fr}(L(p) \cap M_2(\mathfrak{S}))$, alors

$$\text{int}(L \cap M_2(\mathfrak{S})) - M_3(\mathfrak{S}) \neq \emptyset.$$

Démonstration. - Soit z le point commun à $L = L(x_0)$ et $L(p)$. Puisque $\psi^{-1}(z) \in \text{fr} f((a, b))$, il résulte en vertu du lemme 5, qu'on a $\text{card} f^{-1}(\psi^{-1}(z)) = 1$. Donc $z \in M_2(\mathfrak{S}) - M_3(\mathfrak{S})$.

Supposons que tous les points intérieurs à $L(p) \cap M_2(\mathfrak{S})$ se trouvent entre z et $-p$ sur $L(p)$. Alors, si $x_1 \in (a, x_0)$ et $x_2 \in (x_0, b)$, le point z se trouve entre $L \cap L(\varphi(x_1))$ et $L \cap L(\varphi(x_2))$ sur L , c.-à-d. que $z \in \text{int}(L \cap M_2(\mathfrak{S}))$. Par conséquent,

$$z \in \text{int}(L \cap M_2(\mathfrak{S})) - M_3(\mathfrak{S}).$$

Passons à la démonstration du théorème annoncé au début de la note. En effet, si L est une courbe de \mathfrak{S} différente de $L(p)$, alors soit elle contient un point de $M_5(\mathfrak{S})$, selon le lemme 6, soit elle contient un point intérieur à $L \cap M_2(\mathfrak{S})$ et par lequel passent exactement deux courbes de \mathfrak{S} , selon le lemme 7.

Mais, dans l'hypothèse que

$$\text{int}(L \cap M_2(\mathfrak{S})) = L \cap M_4(\mathfrak{S}) - M_5(\mathfrak{S}),$$

nous aurions, selon le lemme 5,

$$\text{fr}(L \cap M_2(\mathfrak{S})) \cap M_3(\mathfrak{S}) = \emptyset$$

et, évidemment,

$$\text{int} (L \cap M_2(\mathcal{U})) - M_3(\mathcal{U}) = \emptyset,$$

en contradiction avec nos conclusions. Donc cette hypothèse faite sur L est inadmissible puisque sur une autre courbe de \mathcal{U} , à savoir sur $L(\phi)$, la même hypothèse avait été faite.

La démonstration du théorème est achevée.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] B. GRÜNBAUM, *Continuous families of curves*, « Can. J. Math. », 18, 529–537 (1966).
- [2] T. ZAMFIRESCO, *On planar continuous families of curves*, « Can. J. Math. » (à paraître).
- [3] T. ZAMFIRESCO, *Sur les familles continues de courbes* (Note I) « Rend. Lincei » (à paraître).