
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIA TERESA BONARDI

**Sopra i monoidi cubici di un $S_{3,q}$, con speciale
riguardo al caso $q=5$**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.6, p. 792–796.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_6_792_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_6_792_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sopra i monoidi cubici di un $S_{3,q}$, con speciale riguardo al caso $q = 5$* ^(*). Nota di MARIA TERESA BONARDI, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Projective characterization of the set of the points lying on a cubic surface with a double point of a Galois space $S_{3,q}$, and some additional remarks for the case $q = 5$.

1. G. Tallini ha ottenuto in [5] eleganti caratterizzazioni delle superficie cubiche di $S_{3,q}$ aventi almeno tre punti doppi ed io stessa ho ottenuto in [2] un risultato analogo per le superficie cubiche con due punti doppi. In questa Nota prenderò in considerazione le superficie $\mathbb{F}^3$ con un solo punto doppio, pervenendo ad un risultato dello stesso tipo. Anche ora, come già per le $\mathbb{F}^3$ con due punti doppi, presenta speciale interesse il caso $q = 5$ perché una $\mathbb{F}^3$ di un $S_{3,5}$ con uno oppure con due punti doppi ed avente il massimo numero di punti è esaurita dalle sue rette ed è quindi una rigata cubica priva di retta doppia senza essere necessariamente un cono. Lo stesso fatto non si presenta ad esempio nel caso analogo di una $\mathbb{F}^3$ di $S_{3,5}$ con 41 punti di cui 4 doppi, le cui 9 rette contengono complessivamente soltanto 37 punti (cfr. [5], Nota II, teorema II).

2. Sia $F(N)$ un insieme di N punti di uno spazio lineare $S_{3,q}$ di dimensione 3 ed ordine dispari $q > 3$ ⁽¹⁾ al quale appartenga per intero ogni retta avente in comune con esso almeno quattro punti. Dirò che $Q \in F(N)$ è un punto doppio se ogni retta passante per Q e non appartenente ad $F(N)$ passa al più per un altro punto dell'insieme. Supporrò inoltre che $F(N)$ non contenga né piani né regoli né terne di rette non complanari ed uscenti da un punto che non sia doppio.

Relativamente all'insieme $F(N)$ dimostrerò il seguente:

TEOREMA: Se $N \geq q^2 + 6q + 1$ e se $F(N)$ possiede un solo punto doppio Q ed inoltre ogni retta p dell'insieme passante per Q appartiene a non più di due piani seganti $F(N)$ in terne di rette uscenti da Q , allora $F(N)$ è una superficie cubica ed $N = q^2 + 6q + 1$.

L'ipotesi $N \geq q^2 + 6q + 1$ assicura intanto che $F(N)$ contiene almeno sei rette passanti per Q . Se p è una di esse, un piano contenente p ha in

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 21 giugno 1967.

(1) Per le definizioni e le prime proprietà dei campi di Galois e degli spazi lineari finiti, cfr. [4].

comune con $F(N)$ fuori di p un insieme $\mathfrak{I}(\pi)$ che può essere:

o) un h -arco ampliabile in un $(h+1)$ -arco con l'aggiunta di Q ; sicché $0 \leq h \leq q$;

- 1) una retta;
- 2) una retta passante per Q ed un punto;
- 3) due rette di cui una sola per Q ;
- 4) due rette passanti entrambe per Q .

Diremo che π è di tipo m ($m = 0, 1, 2, 3, 4$) se $\mathfrak{I}(\pi)$ presenta il caso m . Incominciamo a dimostrare che se l_m è il numero dei piani di tipo m che passano per p risulta:

$$(1) \quad l_1 = l_2 = l_4 = 0, \quad l_3 = 5, \quad l_0 = q - 4.$$

Si ha intanto $\sum_{i=0}^4 l_i = q + 1$ e quindi $N \leq (q+1)^2 + l_2 + (q-1)l_3 + ql_4$; ma $N \geq q^2 + 6q + 1$, dunque:

$$(2) \quad l_3(q-1) \geq 4q - l_4q - l_2.$$

Ora osserviamo che:

a) se $l_4 = 1$ ed $l_2 \leq 2$, la (2) porge $l_3 \geq 4$. Siano allora σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) quattro piani di tipo 3 e per ogni i , sia $\mathfrak{I}(\sigma_i) = a_i \cup b_i$, con a_i e b_i rette di cui la seconda non passante per Q . Se α fosse un piano di tipo 4 ed $\mathfrak{I}(\alpha) = c_1 \cup c_2$, le rette b_1, b_2, b_3 certamente sgheembe a due a due ⁽²⁾, segherebbero il piano $a_4 c_j$ ($j = 1, 2$) in tre punti appartenenti ad una retta t_j ; b_1, b_2, b_3, a_4 sarebbero allora quattro rette del regolo $\{p, t_1, t_2\}$ ⁽³⁾, che apparterrebbe ad $F(N)$, contro una delle ipotesi;

b) se $l_4 = 1$ ed $l_2 \geq 3$, la (2) dà $l_3 \geq 3$; scelti allora tre piani τ_1, τ_2, τ_3 di tipo 2 e detta r_i la retta contenuta in $\mathfrak{I}(\tau_i)$ si potrebbe ripetere il ragionamento fatto in a) sostituendo i piani $a_4 c_j$ con due dei piani $r_i r_j$;

c) se $l_4 = 2$, $F(N)$ non può contenere due rette b_1 e b_2 tra loro sgheembe ed appoggiate a p in punti distinti da Q . Altrimenti, detti α_1 ed α_2 i due piani di tipo 4 e posto $\mathfrak{I}(\alpha_j) = c_j \cup d_j$ ($j = 1, 2$) il piano $\gamma = c_1 c_2$ conterrebbe un'altra retta r di $F(N)$ e similmente il piano $\delta = d_1 d_2$ conterrebbe un'altra retta s di $F(N)$; r ed s , entrambe incidenti a b_1 e b_2 , sarebbero tra loro sgheembe e quindi segherebbero la retta $\gamma \cap \delta$ in punti distinti tra loro (e da Q). La retta $\gamma \cap \delta$ apparterrebbe ad $F(N)$ che pertanto conterrebbe qualche piano.

Si ha dunque $l_4 = 0$ e di conseguenza $l_3 \geq 4$. Proviamo ora che $l_2 < 4$. Sia – per assurdo – $l_2 \geq 4$ e – per ogni $i = 1, 2, 3, 4$ – sia ρ_i un piano di tipo 2, f_i la retta di $\mathfrak{I}(\rho_i)$, σ_i un piano di tipo 3, e b_i la retta di $\mathfrak{I}(\sigma_i)$ che non passa per Q . Si vede subito che le quattro rette b_i dovrebbero allora appoggiarsi, oltre che a p , a due rette t_1, t_2 , contenute una nel

(2) Se due delle b_i (ad esempio b_1 e b_2) fossero incidenti, $F(N)$ conterrebbe il piano da esse individuato, oppure un piano passante per Q : per convincersene basta pensare alle intersezioni del piano $b_1 b_2$ con le rette di $F(N)$ uscenti da Q .

(3) Ora e nel seguito indico con $\{a, b, c\}$ il regolo avente a, b, c come direttrici.

piano f_1f_2 e l'altra in f_3f_4 , sghembe tra loro e con p . Ne seguirebbe: $\{t_1, t_2, p\} \subset F(N)$; contro una delle ipotesi.

Dunque: $l_2 < 4$ e, per la (2): $l_3 \geq 5$.

Siano ora $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ cinque piani di tipo 3 e - con le solite notazioni - $\mathfrak{J}(\sigma_i) = a_i \cup b_i$ (b_i non passante per Q). Denoteremo poi con i, j, l, m, n una qualunque permutazione degli indici 1, 2, 3, 4, 5. Le rette b_i, b_j, b_l - essendo sghembe tra loro ⁽⁴⁾ e con a_m ed a_n - intersecano il piano $a_m a_n$ in tre punti distinti e non situati né su a_m né su a_n ; la retta r_{mn} che congiunge due di essi deve pertanto far parte di $F(N)$ e contenere anche il terzo. Si determinano così su $F(N)$ 10 rette r_{mn} ($1 \leq m \leq n \leq 5$) ciascuna sghemba con p , perché se r_{mn} e p fossero complanari, al loro piano apparterebbero b_i, b_j e b_l .

Proviamo che, *oltre alle a_i e b_i , non esiste altra retta di $F(N)$ appoggiata a p* . Intanto se $a \in F(N)$ fosse una retta per Q distinta dalle a_i , il piano aa_i (per ogni $1 \leq i \leq 5$) dovrebbe contenere una retta s_i di $F(N)$ diversa da a e da a_i , incidente a tutte le b_j (con $j \neq i$) e non passante per Q ; allora il regolo $\{b_i, b_j, b_l\}$ conterrebbe s_m, s_n, r_{mn} e p e quindi farebbe parte di $F(N)$. Se poi $F(N)$ contenesse una retta b non passante per Q e diversa dalle b_i essa dovendo essere sghemba con le a_i si appoggerebbe a tutte le r_{mn} ed il regolo $\{b, b_i, b_j\}$ (contenendo p, r_{lm}, r_{ln} ed r_{mn}) farebbe parte di $F(N)$.

Le (1) sono così provate.

3. Per completare la dimostrazione del teorema, osserviamo che due delle 10 rette r_{mn} aventi un indice in comune (ossia incidenti ad una stessa coppia di b_i) sono certo sghembe; invece due rette r_{ij} ed r_{lm} (con $i \neq j \neq l \neq m$) devono essere incidenti, perché se esse incontrassero in punti distinti la retta $a_i a_j \cap a_l a_m$, questa farebbe parte di $F(N)$ ed uno almeno dei due piani $a_i a_j, a_l a_m$ conterebbe quattro rette dell'insieme. Osserviamo inoltre che se i, j, l, m, n è ancora una permutazione di 1, 2, 3, 4, 5, r_{ij}, r_{lm} e b_n , essendo incidenti a due a due e non potendo - per ipotesi - uscire da uno stesso punto, risultano complanari. In particolare sono complanari le due terne di rette r_{12}, r_{34}, b_5 ed r_{13}, r_{25}, b_4 ; essendo $q \geq 5$ è sempre possibile scegliere un punto su b_4 , uno su b_5 e due su ciascuna delle rette $r_{12}, r_{34}, r_{13}, r_{25}$ tutti distinti tra loro e distinti dai punti che quelle rette hanno a due a due in comune. Si ottengono così 10 punti i quali insieme con $r_{12} \cap b_4, r_{13} \cap b_5, r_{34} \cap r_{25}, r_{12} \cap r_{34}, r_{13} \cap r_{25}$ (certo tutti distinti per le ipotesi fatte su $F(N)$) offrono 15 condizioni indipendenti alle superficie del terzo ordine che li devono contenere.

Sia allora $\mathfrak{F}^3$ la superficie cubica passante per quei 15 punti ed avente un punto doppio in Q ; come si vede facilmente $\mathfrak{F}^3$ contiene tutte le rette a_i, b_i ed r_{ij} e pertanto se π_s è un piano di tipo 3 i due insiemi $\pi_s \cap F(N)$ e $\pi_s \cap \mathfrak{F}^3$ coincidono. Se, poi, π_s è di tipo 0, l'insieme $\mathfrak{J}(\pi_s)$ degli h_s punti comuni a π_s ed $F(N)$ fuori di p deve contenere i 4 punti (fra loro distinti) $Q_{si} = \pi_s \cap r_{1i}$ ($i = 2, 3, 4, 5$) e con l'aggiunta di Q diventa - come si è detto - un

(4) Vedi nota (2).

$(h_s + 1)$ -arco $\mathfrak{J}'(\pi_s)$. Pertanto se γ_s è la conica residua intersezione di π_s con $\mathfrak{F}^3$, oltre p , basta osservare che anche γ_s passa per Q ed i punti Q_{si} per concludere che se $h_s \geq q - 1$ si ha: $\mathfrak{J}'(\pi_s) \subset \gamma_s$.

Dal fatto che $\mathfrak{F}^3$ possiede esattamente $q^2 + 6q + 1$ punti (cfr. [3], teorema 1) di cui $11q - 4$ contenuti nei piani σ_i segue poi che tra le coniche γ_s (ottenute al variare di π_s nel fascio di asse p) una sola è tangente a p ; quindi tra i numeri h_s uno al più può risultare uguale a q . D'altra parte dalle (1) e dall'ipotesi $N \geq q^2 + 6q + 1$ si ricava: $\sum_{s=1}^{q-4} h_s \geq q^2 - 5q + 5 = (q - 1)(q - 5) + q$; perciò se qualcuno degli h_s fosse inferiore a $q - 1$ almeno due degli altri dovrebbero essere uguali a q . Concludendo, l'unico caso possibile è quello in cui uno degli h_s vale q , tutti gli altri valgono $q - 1$ ed $\mathfrak{J}(\pi_s)$ è sempre uguale all'insieme dei punti di γ_s fuori di p . Ogni piano passante per p sega dunque $F(N)$ ed $\mathfrak{F}^3$ nello stesso insieme, ossia $F(N)$ ed $\mathfrak{F}^3$ coincidono e pertanto si ha $N = q^2 + 6q + 1$.

4. Sia, ora, $q = 5$. Tra i sei piani passanti per p cinque sono come si è visto - di tipo 3 ed uno solo, sia π , è di tipo 0. Per ciò che precede, π sega $F(N)$ in un insieme di punti costituito da p e da una conica γ tangente in Q alla retta p . Dei cinque punti di γ fuori di p , quattro sono i punti $Q_i = \pi \cap r_{1i}$ ($i = 2, 3, 4, 5$) ed il quinto deve anch'esso appartenere a qualcuna delle rette r_{mn} ; infatti, se così non fosse ciascuna di queste rette intersecherebbe π in uno dei Q_i e di conseguenza almeno tre di esse passerebbero per lo stesso punto; il che invece - come risulta dal n. 3 - non avviene. Pertanto se $q = 5$ le 21 rette p, a_i, b_i, r_{ij} esauriscono completamente $F(N)$ ed ogni superficie cubica $\mathfrak{F}^3$ di $S_{3,5}$ con un solo punto doppio Q , la quale non contenga né piani né regoli ed abbia complessivamente 56 punti è luogo di rette, pur senza essere necessariamente un cono. Una $\mathfrak{F}^3$ siffatta contiene sempre come per parte il cono ad essa tangente in Q , perché se $q = 5$ quel cono si riduce proprio all'insieme delle sei rette della superficie uscenti da Q ⁽⁵⁾.

Osservo inoltre che, nel caso $q = 5$, se p è ancora una retta di $F(N)$ passante per Q , non è difficile approfondendo l'esame delle sezioni di $F(N)$ con i piani passanti per p , vedere che l'ipotesi $l_4 \leq 2$ del teorema può essere sostituita con quella, meno restrittiva, che $F(N)$ non sia un cono; si può quindi concludere senz'altro che se $q = 5$ ed $N \geq 56$, ogni $F(N)$ di $S_{3,5}$ con un solo punto doppio Q è un cono luogo di 11 rette ⁽⁶⁾ uscenti da Q , oppure è una superficie cubica, non cono, luogo di 21 rette di cui 6 uscenti dal punto doppio ed in ogni caso risulta $N = 56$.

(5) Una superficie G di questo tipo è ad esempio quella di equazione: $(x_1 x_2 - x_0^2) x_3 + (x_1^2 - x_2^2) x_0 = 0$; G ha il punto doppio in $Q = (0, 0, 0, 1)$ e, pur essendo irriducibile, contiene le sei rette del cono di equazione $x_1 x_2 - x_0^2 = 0$ ad essa tangente in Q .

(6) Se $F(N)$ è un cono costituito da h rette uscenti da Q , un qualunque piano non passante per Q sega $F(N)$ in un $\{h; 3\}$ -arco; essendo 11 il massimo valore di h per cui esistono $\{h; 3\}$ -archi in un $S_{2,5}$ (cfr. [1], n. 2) deve essere $h \leq 11$. Dall'ipotesi $N \geq 56$ segue allora: $h = 11$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARLOTTI A, *Sui $\{k; n\}$ -archi di un piano lineare finito*, « Boll. U.M.I. », (3), II, 553-556 (1956).
- [2] BONARDI M. T., *Intorno a certe superficie cubiche dello spazio di Galois*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 37, 396-400 (1965).
- [3] ROSATI L. A., *Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito*, « Boll. U.M.I. », (3) II, 412-418 (1956).
- [4] SEGRE B, *Lectures on modern geometry*, Roma, Cremonese, 1961.
- [5] TALLINI G., *Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di $S_{3,q}$* , Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 26, 484-489 e 644-648 (1958).