Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Succi

Il teorema di de Rham olomorfo nel caso relativo. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.6, p. 784–791.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_6_784_0>

Topologia. — *Il teorema di de Rham olomorfo nel caso relativo.* Nota I di FRANCESCO SUCCI [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — The de Rham theorem in the holomorphic case is extended to the pair (X , Y), where X is a complex analytic manifold and Y the union of a finite number of complex analytic submanifolds in "general position", under suitable conditions, always satisfied for the Stein manifolds.

INTRODUZIONE. – Il teorema di de Rham olomorfo stabilisce l'esistenza di un isomorfismo tra la coomologia delle forme olomorfe di una varietà analitica complessa soddisfacente ad opportune condizioni (in particolare una varietà di Stein) e la coomologia a valori complessi della varietà.

Nel presente lavoro, questo teorema viene esteso, sotto opportune ipotesi, al caso di una varietà analitica complessa X modulo una unione finita Y di sottovarietà in posizione generale, intendendo per «sottovarietà» una sottovarietà analitica complessa regolarmente immersa.

In queste condizioni la dimostrazione del teorema «relativo» per X mod Y si può conseguire per ricorrenza, facendo uso del «lemma dei cinque» e del teorema di de Rham olomorfo «assoluto».

Dopo aver riconosciuto la coerenza dei fasci analitici di forme che intervengono, si dà, dei teoremi trovati, una esemplificazione per le varietà di Stein, per le quali essi sussistono incondizionatamente (come nel caso reale C^{∞}) essendo le condizioni di validità sempre soddisfatte in virtù del Teorema B di H. Cartan.

In una successiva Nota stabiliremo un teorema di de Rham olomorfo di tipo «assoluto» per enti, più generali delle varietà, costituiti dall'unione di varietà complesse saldate tra loro lungo sottovarietà. Si ritroverà anche, in modo autonomo, tramite una risoluzione del fascio dei numeri complessi concentrato su X — Y, il teorema di de Rham olomorfo relativo in condizioni, più generali delle precedenti, analoghe a quelle considerate nel caso reale (cfr. [6, 7]).

I. – CASO DI UNA SOTTOVARIETÀ.

1. – *Complessi di forme olomorfe.* – Sia X una varietà analitica complessa, $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, e Y una sua *sottovarietà* analitica complessa (cioè regolarmente immersa), chiusa, $\dim_{\mathbf{C}} Y = m$, $(m < n)$. Sia inoltre:

$$(1.1) \qquad i: \quad Y \to X$$

l'iniezione della sottovarietà Y in X.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.
(**) Nella seduta del 21 giugno 1967.

Indicheremo, nel seguito, genericamente, con $\tilde{\Omega}$ *fasci di germi di forme olomorfe*, con Ω *moduli di forme olomorfe globali*, con Ω^* i *complessi* di tali moduli. Precisamente porremo:

$\mathcal{O}$ = fascio (di anelli) su X delle funzioni olomorfe di X;

$\tilde{\Omega}^p(X)$ = fascio (di $\mathcal{O}$–moduli) delle p–forme olomorfe di X; $\tilde{\Omega}^0(X)=\mathcal{O}$;

$\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ = fascio (di $\mathcal{O}$–moduli) delle p–forme olomorfe di X, la cui restrizione ad Y è identicamente nulla,

dicendo che una p–forma olomorfa ω^p è identicamente nulla su Y quando la forma trasposta $i^*\omega^p$ è la forma nulla di Y.

$\Omega^p(X)$ = spazio vettorale (su **C**) delle p–forme olomorfe globali di X;

$\Omega^p(Y)$ = spazio vettoriale (su **C**) delle p–forme olomorfe globali della varietà analitica complessa Y;

$\Omega^p(X, Y)$ = spazio vettoriale (su **C**) delle p–forme olomorfe globali di X, la cui restrizione ad Y è identicamente nulla.

Poiché il differenziale esterno $d\omega$ di una forma olomorfa ω è ancora una forma olomorfa e $di^* = i^* d$, $\{\Omega^p(X), d\}$, $\{\Omega^p(Y), d\}$, $\{\Omega^p(X, Y), d\}$ sono complessi di forme che indicheremo rispettivamente con $\Omega^*(X)$, $\Omega^*(Y)$, $\Omega^*(X, Y)$.

PROPOSIZIONE 1. – *Nell'ipotesi che sia* $H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) = 0$, $p \geq 0$, *la successione di complessi di forme*:

$$0 \to \Omega^*(X, Y) \to \Omega^*(X) \to \Omega^*(Y) \to 0 \tag{1.2}$$

è esatta. Cioè ogni forma olomorfa definita su tutta la varietà analitica complessa Y è restrizione di (almeno) una forma olomorfa definita su tutta X.

Dimostrazione. – Si consideri la successione esatta di fasci su X:

$$0 \to \tilde{\Omega}^p(X, Y) \to \tilde{\Omega}^p(X) \to \tilde{\Omega}^p(X)/\tilde{\Omega}^p(X, Y) \to 0 . \tag{1.3}$$

Per $p = 0$, $\tilde{\Omega}^0(X) = \mathcal{O}$ e $\tilde{\Omega}^0(X, Y)$ coincide col fascio di ideali $\mathfrak{J}$, su X, dei germi delle funzioni olomorfe nulle identicamente su Y, Posto:

$$\mathcal{O}/\mathfrak{J} = \mathcal{O}(Y), \tag{1.4}$$

il fascio $\mathcal{O}(Y)$ si identifica al fascio (su Y) delle funzioni olomorfe della varietà analitica complessa Y, [3].

Analogamente, per $p > 0$, il fascio $\tilde{\Omega}^p(X)/\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ è nullo fuori di Y ed il fascio da esso indotto su Y si identifica al fascio $\tilde{\Omega}^p(Y)$ dei germi delle p–forme olomorfe della varietà Y. Posto quindi:

$$\tilde{\Omega}^p(X)/\tilde{\Omega}^p(X, Y)|_Y = \tilde{\Omega}^p(Y), \tag{1.4$'$}$$

si ha:

$$\Gamma(Y, \tilde{\Omega}^p(Y)) = \Omega^p(Y), \tag{1.5}$$

e il fascio $\tilde{\Omega}^p(X)/\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ si identifica al fascio su X: $\tilde{\Omega}^p(Y)^X$, che si ottiene prolungando nullo fuori di Y il fascio $\tilde{\Omega}^p(Y)$.

Applicando il funtore H^* di coomologia a (1.2) si ha la successione esatta:

$$(1.6) \qquad 0 \to \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) \to \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X)) \to \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(Y)^X) \to$$
$$\to H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) \to \cdots$$

dalla quale, nell'ipotesi:

$$(1.7) \qquad H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) = 0, \qquad p \geq 0,$$

si trae che l'omomorfismo:

$$(1.8) \qquad \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X)) \to \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(Y)^X), \qquad p \geq 0$$

è surgettivo.

Tenuto quindi conto dell'isomorfismo:

$$(1.9) \qquad \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(Y)^X) = \Gamma(Y, \tilde{\Omega}^p(Y))$$

e delle identificazioni (1.5) e $\Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) = \tilde{\Omega}^p(X, Y)$, $\Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = \Omega^p(X)$, da (1.6), (1.7) segue l'asserto.

2. *Il teorema di de Rham olomorfo relativo.* – Qualora per la varietà analitica complessa X si abbia:

$$(2.1) \qquad H^r(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = 0 \quad \text{per} \quad p \geq 0, r \geq 1,$$

sussiste, com'è noto, il *teorema di de Rham «olomorfo»*, che stabilisce un isomorfismo tra la coomologia R^* delle forme olomorfe e la coomologia a valori complessi di X, [4].

È nostro intento di estendere questo teorema al caso relativo, cioè per X mod Y, supponendo per il momento che Y sia una sottovarietà di X (questo n.) o una unione finita di sottovarietà in posizione generale (n. 6). In queste condizioni la dimostrazione del teorema che abbiamo in vista può conseguirsi poggiando sul teorema «assoluto» sopra ricordato, facendo uso della coomologia singolare a valori complessi, cosicché ci riferiremo per il momento a tale coomologia. Ciò è lecito poiché dal confronto tra il teorema di de Rham olomorfo e quello per le forme C^∞ si ricava che ogni forma C^∞ chiusa è coomologa ad una forma olomorfa chiusa e quindi che l'isomorfismo di de Rham «olomorfo» è realizzabile, come nel caso C^∞, mediante integrazione delle forme olomorfe sui cicli.

D'altronde tale fatto può anche ritrovarsi, insieme con l'isomorfismo tra la coomologia di Čech e quella singolare (a valori complessi) di X, mediante il teorema di de Rham «algebrico» applicato alla risoluzione (aciclica per l'ipotesi (2.1)) del fascio costante **C** (dei numeri complessi) data dai fasci $\tilde{\Omega}^p(X)$ delle forme olomorfe e alla risoluzione fina dello stesso fascio **C** data dai fasci $\tilde{C}^p(X; \mathbf{C})$ delle cocatene singolari a valori complessi, tenendo conto che l'integrazione delle forme olomorfe sulle catene singolari induce un omomorfismo (di complessi): $\Omega^p(X) \to C^p(X; \mathbf{C})$.

Ciò premesso cominciamo con lo stabilire il:

TEOREMA 1. – *Se* $H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) = 0$ *per* $p \geq 0$ *e se:*

$$H^r(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = 0 \quad per \quad p \geq 0, r \geq 1 \tag{2.2}$$

e

$$H^s(Y, \tilde{\Omega}^p(Y)) = 0 \quad per \quad p \geq 0, s \geq 1 \tag{2.3}$$

la coomologia di de Rham relativa $R^*(X, Y)$ *delle forme olomorfe di* X *nulle su* Y, *è isomorfa alla coomologia singolare relativa* $\overset{s}{H}{}^*(X \bmod Y; \mathbf{C})$:

$$R^j(X, Y) \approx \overset{s}{H}{}^j(X \bmod Y; \mathbf{C}). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. – Essendo soddisfatte le ipotesi della Prop. 1 sussiste la successione esatta (1.1): $0 \to \Omega^*(X, Y) \to \Omega^*(X) \to \Omega^*(Y) \to 0$.

L'integrazione delle forme olomorfe appartenenti a $\Omega^p(—)$ sulle catene singolari appartenenti a $C_p(—)$ fornisce un omomorfismo h, di $\mathbf{C}$-moduli, di $\Omega^p(—)$ nel $\mathbf{C}$-modulo $C^p(—; \mathbf{C})$ delle cocatene singolari a valori complessi. Poiché tale omomorfismo commuta con gli operatori di differenziazione esterna e di cobordo, esso induce un omomorfismo di complessi tra Ω^* e C^*, onde si ha il diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \Omega^*(X, Y) & \to & \Omega^*(X) & \to & \Omega^*(Y) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & \downarrow{\scriptstyle h_2} & & \downarrow{\scriptstyle h_3} & \\ 0 \to & C^*(X, Y) & \to & C^*(X) & \to & C^*(Y) & \to 0. \end{array} \tag{2.5}$$

Da questo si ottiene il diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & R^{i-1}(X) & \to & R^{i-1}(Y) & \to & R^i(X, Y) & \to & R^i(X) & \to & R^i(Y) & \to \cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_3} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_3} & \\ \cdots \to & \overset{s}{H}{}^{i-1}(X; \mathbf{C}) & \to & \overset{s}{H}{}^{i-1}(Y; \mathbf{C}) & \to & \overset{s}{H}{}^i(X \bmod Y; \mathbf{C}) & \to & H^i(X; \mathbf{C}) & \to & H^i(Y; \mathbf{C}) & \to \cdots \end{array} \tag{2.6}$$

dove $\bar{h}_j$ sono gli omomorfismi indotti dagli h_j.

Poiché per le condizioni (2.2), (2.3) sussiste il teorema di de Rham olomorfo per le varietà X e Y, gli omomorfismi $\bar{h}_2$, $\bar{h}_3$ sono isomorfismi, onde, per il lemma dei cinque, lo sono anche gli $\bar{h}_1$ e il Teorema 1 è stabilito.

Osservazioni. – *a*) La condizione (2.1) di validità del teorema di de Rham olomorfo si può indebolire, [9]. Ne segue che:

TEOREMA 1'. – *Se* $H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y)) = 0$ *per* $p \geq 0$, *e se esistono interi* $q \geq 1$, $q' \geq 1$ *tali che si abbia:*

$$H^r(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = 0 \quad per\ ogni \quad \begin{cases} 0 \leq p \leq q - 1 \\ 1 \leq r \leq q - p \end{cases} \tag{2.2'}$$

e

$$H^s(Y, \Omega^p(Y)) = 0 \quad per\ ogni \quad \begin{cases} 0 \leq p \leq q' - 1 \\ 1 \leq s \leq q' - p \end{cases} \tag{2.3'}$$

risulta:

$$R^j(X, Y) \approx \overset{s}{H}{}^j(X \bmod Y; \mathbf{C}) \quad per \quad 0 \leq j \leq \min(q, q'). \tag{2.4'}$$

b) Dal confronto tra il teorema di de Rham relativo per le forme C^∞ ([6]) e quello olomorfo relativo ora stabilito, si ha il:

COROLLARIO. – *Ogni forma* C^∞ *chiusa di* X, *nulla identicamente su* Y, *è coomologa ad una forma olomorfa chiusa identicamente nulla su* Y.

c) Poiché $R^{m+j}(Y) = 0$, $(m = \dim_{\mathbf{C}} Y, j \geq 1)$ risulta $H^{m+j}(Y ; \mathbf{C}) = 0$ per $j \geq 1$ e $R^{m+j}(X, Y) \approx R^{m+j}(X)$ per $j \geq 2$ e quindi $H^{m+j}(X \bmod Y ; \mathbf{C}) \approx H^{m+j}(X ; \mathbf{C})$ per $j \geq 2$.

d) Poiché $R^{n+j}(X) = 0$ è pure $H^{n+j}(X \bmod Y ; \mathbf{C}) = 0$ per $j \geq 1$.

3. *Coerenza dei fasci di forme olomorfe relative.* – Allo scopo di esemplificare il Teor. 1 al caso delle varietà di Stein, occorre la seguente digressione sulla estensione della proprietà di coerenza del fascio delle forme olomorfe di X a quello delle forme olomorfe nulle identicamente su Y.

Il fascio $\mathcal{O}$ e il fascio di ideali $\mathfrak{J}$ delle funzioni olomorfe identicamente nulle su Y, sono fasci coerenti (come fasci di $\mathcal{O}$–moduli su X). Quindi è $\mathcal{O}$–coerente il fascio $\mathcal{O}/\mathfrak{J}$ su X e il fascio $\mathcal{O}(Y)$ è $\mathcal{O}(Y)$–coerente su Y, [3].

Il fascio $\tilde{\Omega}^p(X)$, $p \geq 1$, su X è, com'è noto, [1], $\mathcal{O}$–coerente essendo localmente isomorfo al fascio coerente $\mathcal{O}^s$, somma diretta di $s = \binom{n}{p}$ copie del fascio $\mathcal{O}$. Si ha poi:

(3.1) – *Il fascio* (*di* $\mathcal{O}$–*moduli*) $\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ *delle* p–*forme olomorfe nulle identicamente su* Y, *è un fascio* $\mathcal{O}$–*coerente su* X.

Dimostrazione. – Invero $\tilde{\Omega}^p(Y)$ è un fascio $\mathcal{O}(Y)$–coerente su Y, quale fascio delle p–forme olomorfe della varietà analitica complessa Y. Ne segue che la sua estensione ad X: $\tilde{\Omega}^p(Y)^X$, è un fascio $\mathcal{O}$–coerente su X. Dalla successione esatta:

$$0 \to \tilde{\Omega}^p(X, Y) \to \tilde{\Omega}^p(X) \to \tilde{\Omega}^p(Y)^X \to 0$$

segue l'asserto, [5].

Osservazione. – Questo risultato può anche stabilirsi direttamente considerando che, per essere Y una sottovarietà di X, nell'intorno (in X) di ogni punto $y \in Y$ esistono coordinate complesse locali tali che la Y si rappresenta, in quell'intorno, annullando $n - m$ di dette coordinate locali. Ciò posto, se una p–forma olomorfa nell'intorno di y ha identicamente nulla la sua restrizione ad Y, vuol dire che i suoi coefficienti che non sono moltiplicati per alcuno dei differenziali delle coordinate che si annullano su Y, debbono annullarsi identicamente su Y, mentre per i rimanenti coefficienti non si hanno condizioni. Pertanto il fascio $\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ in ogni punto $y \in Y$ è coerente quale somma diretta di alcune copie del fascio coerente $\mathfrak{J}$ e di alcune copie del fascio $\mathcal{O}$. La coerenza nei punti di $X - Y$ è ovvia.

4. *Caso delle varietà di Stein.* – Se X è una varietà di Stein, anche la sottovarietà Y è una varietà di Stein, [3]. Essendo i fasci $\tilde{\Omega}^p(X)$, $\tilde{\Omega}^p(Y)$, $\tilde{\Omega}^p(X, Y)$ coerenti, dal teorema B di H. Cartan segue l'annullamento della coomologia

di dimensione maggiore di zero a coefficienti nei detti fasci, onde le condizioni del Teor. 1 sono in tal caso soddisfatte. Ne segue:

TEOREMA 2. – *Se* X *è una varietà di Stein ed* Y *una sua sottovarietà chiusa, si ha:*

$$R^j(X\,,\,Y) \approx H^j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{C})\,, \qquad j \geq 0. \tag{4.1}$$

5. *Una proprietà topologica.* – Supponiamo che per la coppia X, Y valga il teorema di de Rham olomorfo relativo. Indicati con $\overset{s}{H}_j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{Z})$ i gruppi di omologia singolare intera (a supporti compatti) e con T_j i loro sottogruppi di torsione, dal teorema dei coefficienti universali si trae:

$$H^j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{C}) = \mathrm{Hom}\,(\overset{s}{H}_j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{Z})\,,\,\mathbf{C}) = \mathrm{Hom}\,(\overset{s}{H}_j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{Z})/T_j\,,\,\mathbf{C})\,.$$

Poiché per $j > n$, gli spazi vettoriali di coomologia $H^j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{C})$ sono nulli, come osservato in n. 2, oss. d), si ha:

PROPOSIZIONE 2. – *Se per* X *mod* Y *vale il teorema di de Rham olomorfo relativo, i gruppi di omologia singolare relativa intera* $H_j(X \bmod Y\,;\,\mathbf{Z})$ *sono gruppi di torsione per* $j > n = \dim_{\mathbf{C}} X$.

II. – CASO DI k SOTTOVARIETÀ IN POSIZIONE GENERALE.

5. *Complessi di forme olomorfe relative.* – Siano $Y_1, \cdots, Y_k$ sottovarietà analitiche complesse di X, chiuse, in posizione generale (ved. ad esempio [8]) e $\dim_{\mathbf{C}} Y_j = m_j < n$.

Posto $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{k-1} = Y'$, consideriamo i fasci $\tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y')$ e $\tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y' \cup Y_k)$ delle p–forme olomorfe di X la cui restrizione rispettivamente a Y' e a $Y' \cup Y_k$ è identicamente nulla, dicendo che una p–forma ω^p ha restrizione ad $Y_1 \cup \cdots \cup Y_h$ identicamente nulla se, posto $i_r : Y_r \to X$, riesce $i_r^* \omega^p = 0$ per $r = 1, \cdots, h$.

Il fascio $\tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y' \cup Y_k)$ è un sottofascio di $\tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y')$ e si ha la successione esatta di fasci:

$$0 \to \tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y' \cup Y_k) \to \tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y') \to \tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y')/\tilde{\Omega}^p(X\,,\,Y' \cup Y_k) \to 0\,. \tag{5.1}$$

Interpretiamo il fascio quoziente ora scritto: esso è nullo fuori di Y_k e un suo elemento che si proietta su un punto $y \in Y_k$ è una classe di germi di p–forme olomorfe di X, nell'intorno di y, identicamente nulle su Y' ed aventi tutte la medesima restrizione ad Y_k. Tale restrizione ad Y_k individua evidentemente un germe in y di p–forma olomorfa di Y_k, identicamente nulla su $Y_k \cap Y'$. D'altra parte una p–forma olomorfa nell'intorno in Y_k di $y \in Y_k$, e identicamente nulla su $Y_k \cap Y'$, si estende ad un intorno di y in X, identicamente nulla su Y', a causa dell'ipotesi che le Y_r siano sottovarietà in posizione generale.

Pertanto il fascio indotto su Y_k dal fascio quoziente indicato si identifica al fascio delle p–forme olomorfe della varietà Y_k, la cui restrizione ad $Y_k \cap Y'$ è identicamente nulla.

Porremo quindi:

$$\tilde{\Omega}^p(X, Y)/\tilde{\Omega}^p(X, Y' \cup Y_k)|_{Y_k} = \tilde{\Omega}^p(Y_k, Y'). \tag{5.2}$$

Nell'ipotesi:

$$H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y' \cup Y_k)) = 0, \qquad p \geq 0, \tag{5.3}$$

dalla successione esatta di coomologia cui dà luogo (5.1), segue che:

$$\Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y')) \to \Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(Y_k, Y')^X) \tag{5.4}$$

è un omomorfismo surgettivo.

Poiché $\Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(X, \text{—})) = \Omega^p(X, \text{—})$ e, per quanto detto poco sopra è: $\Gamma(X, \tilde{\Omega}^p(Y_k, Y')^X) = \Gamma(Y_k, \tilde{\Omega}^p(Y_k, Y')) = \Omega^p(Y_k, Y') = \mathbf{C}$–modulo delle p–forme olomorfe definite su tutta la varietà Y_k, identicamente nulle su $Y_k \cap Y'$, si ha la:

PROPOSIZIONE 3. – *Se* $H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y' \cup Y_k)) = 0$ *per* $p \geq 0$, *la successione di complessi di forme olomorfe:*

$$0 \to \Omega^*(X, Y_k \cup Y') \to \Omega^*(X, Y') \to \Omega^*(Y_k, Y') \to 0 \tag{5.5}$$

è esatta.

6. *Il teorema di de Rham olomorfo relativo per una unione di sottovarietà.* – Nell'ipotesi (5.3), supposto verificato il teorema di de Rham olomorfo relativo per X mod Y' e per Y_k mod Y', con argomentazioni analoghe a quelle svolte nel n. 2, si stabilisce subito, per mezzo del lemma dei cinque, il teorema di de Rham olomorfo relativo per X mod $(Y_k \cup Y')$.

D'altra parte, per l'ipotesi che le sottovarietà Y_r sono in posizione generale, tutte le loro intersezioni e le intersezioni di intersezioni sono sottovarietà in posizione generale, onde, per ricorrenza, cominciando dalle condizioni di validità del teorema di de Rham olomorfo per X e Y_1, si possono trovare facilmente tutte le condizioni di annullamento della coomologia che sono sufficienti per poter stabilire la validità del teorema di de Rham olomorfo relativo per X mod Y' e Y_k mod Y' e quindi di quello per X mod $(Y_k \cup Y')$.

La esplicitazione di queste condizioni non offre difficoltà concettuale ma è alquanto pesante. Ci limitiamo perciò ad esplicitarle nel caso $k = 2$. Dalla Prop. 3 si ha allora che, nell'ipotesi

$$H^1(X, \tilde{\Omega}^p(X, Y_1 \cup Y_2)) = 0, \qquad p \geq 0, \tag{6.1}$$

sussiste la successione esatta di complessi:

$$0 \to \Omega^*(X, Y_1 \cup Y_2) \to \Omega^*(X, Y_1) \to \Omega^*(Y_2, Y_1) \to 0.$$

Per stabilire mediante il Teor. 1 il teorema di de Rham per X mod Y_1, oltre a (6.1) dev'essere:

$$\begin{cases} H^r(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = 0 & \text{per } r \geq 1, p \geq 0 \\ H^r(Y_1, \tilde{\Omega}^p(Y_1)) = 0 & \text{per } r \geq 1, p \geq 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Per stabilire mediante il Teor. 1 il teorema di de Rham per Y_2 mod Y_1, posto $Y_{12} = Y_1 \cap Y_2$ dev'essere:

$$\text{(6.3)} \qquad \begin{cases} H^1(Y_2, \tilde{\tilde{\Omega}}^p(Y_2, Y_{12})) = 0 \\ H^r(Y_2, \tilde{\tilde{\Omega}}^p(Y_2)) = 0 \\ H^r(Y_{12}, \tilde{\tilde{\Omega}}^p(Y_{12})) = 0, \qquad \text{per } r \geq 1, \ p \geq 0. \end{cases}$$

Le (6.1), (6.2), (6.3) sono quindi le condizioni cercate: si ha dunque che:

TEOREMA 3. – *Supposte soddisfatte le condizioni* (6.1), (6.2), (6.3), *sussiste il teorema di de Rham olomorfo relativo nella forma stessa* (2.4), *ove si ponga ora* $Y = Y_1 \cup Y_2$.

7. Si estendono facilmente all'attuale caso di una unione di sottovarietà le considerazioni dei nn. 3, 4. Se $Y_{r_1}, \cdots, Y_{r_h}$, dove $1 \leq r_1 < \cdots < r_h \leq k$, sono h delle k sottovarietà Y_j in posizione generale già considerate, si ha la

PROPOSIZIONE 4. – *Il fascio* $\tilde{\tilde{\Omega}}^p(X, Y_{r_1} \cup \cdots \cup Y_{r_h})$ è $\mathcal{O}$*–coerente su* X.

Dimostrazione. – Invero esso è l'intersezione dei fasci $\mathcal{O}$–coerenti $\tilde{\tilde{\Omega}}^p(X, Y_{r_i})$, $(i = 1, \cdots, h)$, (cfr. (3.1)).

Analogamente ad esempio i fasci $\tilde{\tilde{\Omega}}^p(Y_h, Y_1 \cup \cdots \cup Y_{h-1})$ sono $\mathcal{O}(Y_h)$–coerenti su Y_h.

8. Se ora X è una varietà di Stein, lo sono anche le sottovarietà $Y_1, \cdots, Y_k$ e quindi pure tutte le loro possibili intersezioni sono varietà di Stein. Ne segue che, per la coerenza dei fasci di forme che si considerano, sono ora verificate tutte le condizioni di annullamento della coomologia; pertanto:

TEOREMA 4. – *Se* X *è una varietà di Stein e* $Y_1, \cdots, Y_k$ *sue sottovarietà chiuse ed in posizione generale, sussiste il teorema di de Rham olomorfo relativo*

$$R^j(X, Y_1 \cup \cdots \cup Y_k) \approx \overset{s}{H}{}^j(X \bmod (Y_1 \cup \cdots \cup Y_k); \mathbf{C}).$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] CARTAN H., Séminaire 1951–52.

[2] CARTAN H., *Variétés analytiques complexes et cohomologie*. (Coll. fonctions plus. var., Bruxelles 1953).

[3] CARTAN H., *Funzioni e varietà complesse*. (2° Ciclo CIME, Varenna 1963).

[4] SERRE J. P., *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein*. (Coll. fonctions plus. variables, Bruxelles 1953).

[5] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents*, «Ann. Math.», *61* (1955).

[6] SUCCI F., *Il teorema di de Rham e la dualità per le varietà relative*, «Rend. Acc. Lincei», *35* (1963).

[7] SUCCI F., *Realizzazione dell'isomorfismo di de Rham per le varietà relative*, «Rend. Acc. Lincei», *38* (1965).

[8] SUCCI F., *Alcune osservazioni sui teoremi di de Rham*, «Riv. Mat. Univ. Parma» (2), *7* (1966).

[9] VILLANI V., *Alcuni problemi di natura coomologica sulle varietà complesse*. (Pisa 1964).