ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MICHAIL C. BOTEZ

Sur l'ergodicité des systèmes à liaisons completes

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.6, p. 763–765.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_6_763_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria delle probabilità. — *Sur l'ergodicité des systèmes à liaisons complètes.* Nota di MIHAIL C. BOTEZ, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Come generalizzazione della nozione di catena a legami completi è stata recentemente introdotta quella di sistema a legami completi. Qui vengono istituite delle relazioni fra tali sistemi e certi processi stazionari in senso largo, approfondendo lo studio di un nuovo tipo di ergodicità ad essi relativo.

1. Soient $(X, \mathfrak{F}), (W, \mathfrak{O})$ deux espaces mesurables et $\{u(\cdot, x), x \in X\}$ une famille d'applications de W dans soi-même; posons $u(\cdot, x^{(n)}) = u(\cdot, x) \circ \dots \circ u(\cdot, x_1)$ pour tout $x^{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in X^{(n)} = \prod_{j=1}^n X_j, X_j \equiv X, 1 \leq j \leq n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, V \in \mathfrak{O}$, on a $\{(c, x^{(n)}); u(c; x^{(n)}) \in V\} \in \mathfrak{O} \times \mathfrak{F}^{(n)}$, où $\mathfrak{F}^{(n)}$ est la σ -algèbre correspondante à $X^{(n)}$. Considérons une fonction réelle P définie sur $W \times \mathfrak{F}$, telle que: 1° $P(c; \cdot)$ soit une probabilité sur $\mathfrak{F}$ pour chaque $c \in W$, et 2° $P(\cdot, A)$ soit une fonction $\mathfrak{O}$ -mesurable pour chaque $A \in \mathfrak{F}$. D'après [7], la fonction P et les applications $\{u(\cdot, x) | x \in X\}$, jouissant des propriétés mentionnées, définissent un système (aléatoire) à liaisons complètes (1). Pour chaque $c \in W$, il existe un espace de probabilité $\{\Omega, \mathfrak{K}, \mathfrak{S}_c\}$ et une suite de variables aléatoires $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur Ω et à valeurs dans X , telle que 1° $\mathfrak{S}_c\{\xi_1 \in A\} = P(c; A)$, et 2° $\mathfrak{S}_c\{\xi_{n+1} \in A | \xi_1, \dots, \xi_n\}_{\xi_j = x_j, 1 \leq j \leq n} = P(u(c; x^{(n)}); A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit maintenant $\mathfrak{E}(W, \mathfrak{O})$ l'espace des fonctions réelles $\mathfrak{O}$ -mesurables définies sur W , et considérons l'opérateur (linéaire)

$$(1) \quad U\varphi(c) = \int_X P(c; dx) \varphi(u(c; x))$$

défini dans $\mathfrak{E}(W, \mathfrak{O})$. Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, soit $P_{1,m}(c; \cdot)$ la mesure sur $\mathfrak{F}^{(m)}$ définie par $P_{1,m}(c; A^{(m)}) = \int_{X^{(m)}} P(c; dx_1) \dots P(u(c; x^{(m-1)}); dx_m) \cdot \chi_{A^{(m)}}(x_1, \dots, x_m)$,

où $A^{(m)} \in \mathfrak{F}^{(m)}$ et $\chi_{A^{(m)}}$ est l'indicateur de l'ensemble $A^{(m)}$. Il en résulte que, $U^{(n)}$ étant l'itéré d'ordre n de l'opérateur U , pour chaque $A^{(m)} \in \mathfrak{F}^{(m)}, c \in W$, on a $U^{(n)} P_{1,m}(c; A^{(m)}) = \mathfrak{S}_c\{(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{n+m}) \in A^{(m)}\}$.

2. Le problème ergodique, par définition, concerne le comportement asymptotique ($n \rightarrow \infty$) des itérés $U^{(n)}$.

Soit donc T un type de convergence dans $\mathfrak{E}(W, \mathfrak{O})$ et S un sous-espace linéaire (invariant pour U) de $\mathfrak{E}(W, \mathfrak{O})$; un système à liaisons complètes

(*) Nella seduta del 13 maggio 1967.

(1) Le « système à liaisons complètes » est une généralisation récente (voir [7]) de la notion de « chaîne à liaisons complètes », introduite en 1935 (voir [8], [2]).

s'appelle T-fortement sémi-ergodique sur S, si pour tout $\varphi \in S$, la suite de fonctions mesurables $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est T-convergente vers un élément $U^\infty\varphi \in S$. Si cet élément est une constante qui ne dépend que de φ , le système s'appelle fortement T-ergodique sur S. Une convergence dite « faible », peut être introduite suivant [12] en posant la condition que la suite « symétrisée » de la suite $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-T vers 0 pour $\varphi \in S$. De nouveaux types d'ergodicité s'obtiennent aussi suivant les différentes méthodes de sommation de la suite $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\varphi \in S$. (par exemple, la T-(sémi)-ergodicité au sens de Cesaro, etc.).

Les chaînes considérées dans [8], [6], [7] sont comprises dans le cas $S = B(W, \mathfrak{O})^{(2)}$, la T-convergence étant la convergence (uniforme) dans la norme usuelle de $B(W, \mathfrak{O})$. Considérons maintenant les types d'ergodicité définies à l'aide de différents sous-espaces de $\mathfrak{E}(W, \mathfrak{O})$ et différents types de convergence, à savoir: si la T-convergence est la convergence presque-sûre par rapport à une mesure λ sur $\mathfrak{O}$, on aura une (sémi)-ergodicité presque-sûre; si cette convergence est une convergence en moyenne d'ordre p ($1 \leq p \leq \infty$) par rapport à une mesure λ sur $\mathfrak{O}$, pour laquelle U est une application dans $\mathfrak{L}^p(W, \mathfrak{O}, \lambda)^{(2)}$, on aura une (sémi)-ergodicité en moyenne d'ordre p ($1 \leq p \leq \infty$); de telles mesures sont, par exemple, les mesures dites « sous-invariantes » [11], définies par la relation $\int_{\mathfrak{W}} P(c; u_c^{-1}(A)) \lambda(dc) \leq \lambda(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{O}$, où $u_c^{-1}(A) = \{x; u(c; x) \in A\}$.

Le théorème suivant établit la liaison entre les propriétés des systèmes à liaisons complètes et certains processus stationnaires au sens large.

THÉORÈME 1. - Soit U l'opérateur attaché à un système à liaisons complètes. S'il existe une mesure de probabilité (sous)-invariante λ , alors pour chaque $\varphi \in \mathfrak{L}^2(W, \mathfrak{O}, \lambda)$, la suite de fonctions $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un processus stationnaire au sens large sur $\{W, \mathfrak{O}, \lambda\}$.

Il en résulte que l'application des résultats obtenus dans la théorie générale des suites d'opérateurs ([3], [5], etc.) et dans la théorie ergodique classique (globale et ponctuelle - voir par exemple [4]), donne des conditions qui assurent la sémi-ergodicité (presque-sûre et en moyenne, simple ou au sens de Cesaro) du système à liaisons complètes considéré.

THÉORÈME 2. - Soit U l'opérateur attaché à un système à liaisons complètes, λ une mesure de probabilité (sous)-invariante, et supposons de plus que pour tout $A, B \in \mathfrak{O}$, on ait suivant [11]

$$(2) \quad \int_A P(c; u_c^{-1}(B)) \lambda(dc) = \int_B P(c; u_c^{-1}(A)) \lambda(dc).$$

(2) $B(W, \mathfrak{O})$ est l'espace de Banach des fonctions réelles $\mathfrak{O}$ -mesurables définies sur W, avec la norme usuelle [4]; $\mathfrak{L}^p(W, \mathfrak{O}, \lambda)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonctions p -sommables par rapport à λ [4]; $C(W)$ est l'ensemble des fonctions continues sur W, supposé espace de Hausdorff séparable compact ([4], voir aussi [9]).

Sous ces conditions: le système à liaisons complètes considéré est sémi-ergodique λ -presque sûrement sur $B(W, \mathfrak{A})$ et en moyenne d'ordre 2 par rapport à λ sur $\mathfrak{L}^2(W, \mathfrak{A}, \lambda)$; la fonction limite est $U^\infty \varphi = v(\varphi; 0)$, où $v(\varphi; dt)$ est la fonction spectrale du processus $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^}$ sur $\{W, \mathfrak{A}, \lambda\}$, prise dans le point $t = 0$ si la représentation spectrale est prise sur $[-\pi, \pi]$; une condition nécessaire et suffisante pour que le système à liaisons complètes considéré soit ergodique (λ -presque sûrement sur $B(W, \mathfrak{A})$ et en moyenne d'ordre 2 par rapport à λ sur $\mathfrak{L}^2(W, \mathfrak{A}, \lambda)$) est donc que $v(\varphi; 0)$ dépende seulement (p.s.) de φ .*

3. Sous les conditions qui assurent l'existence d'une mesure de probabilité (sous)-invariante pour un système à liaisons complètes (voir [11]), on peut déterminer effectivement la limite $U^\infty \varphi$, dont seulement l'existence est démontrée dans [8], [6], [7], à savoir:

THÉORÈME 3. — *S'il existe une mesure de probabilité (sous)-invariante pour un système à liaisons complètes ergodique sur $B(W, \mathfrak{A})$, la convergence de la suite $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant prise dans la norme de $B(W, \mathfrak{A})$, alors la limite est $U^\infty \varphi = v(\varphi; 0)$ au sens du théorème 2.*

Si l'on suppose que pour tout $\varphi \in C(W)$ [14], la famille de fonctions $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et (quasi)-égal-continue, on obtient des résultats analogues à ceux obtenus dans [9] pour les processus markoviens; cette condition est vérifiée, par exemple, sous les hypothèses de [8].

4. A l'aide du théorème 1, on obtient une solution complète du problème d'extrapolation (statistique) linéaire relatif au processus stationnaire $\{U^{(n)}\varphi\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $\{W, \mathfrak{A}, \lambda\}$.

La méthode de [1] permet le développement d'une théorie ergodique générale pour tout processus aléatoire discret.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOTEZ M. et THEODORESCU R., « Rev. Roum. Math. pures et appl. » (X) 7, 991-1010 (1965).
- [2] CIUCU G. et THEODORESCU R., *Processus à liaisons complètes*, Bucarest 1960 (en roumain).
- [3] DOOB J. L., « Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete » (1) 3, 288-294 (1963).
- [4] DUNFORD N. et SCHWARTZ T., *Linear operators*, vol. I, N. York (1958).
- [5] FOGUEL S. R., « Pacific J. Math. », 13, 551-552 (1963); « Proc. Amer. Math. Soc. », 16/3, 398-406 (1965); « Proc. Amer. Math. Soc. », 17/2 (1966).
- [6] IONESCU-TULCEA C. T., « Canadian J. Math. », 11, 112-121 (1959).
- [7] IOSIFESCU M., « Rev. Roum. Math. pures et appl. », 8, 611-645 (1963).
- [8] ONICESCU O. et MIHOC G., « Bull. Sci. Math. », 39, 174-192 (1935).
- [9] ROSENBLATT M., « Teor. veroiatn. i primen. », 9/2, 205-222 (1964).
- [10] ROZANOV I. A., *Stationarniie sluceainiie protesi*, Moscou 1963 (en russe).
- [11] SIDAK Z., *Casopis pro postovani matematiky*, Praga 1962, pp. 289-298.
- [12] THEODORESCU R., « C.R. Acad. Sci. Paris », 259, 1941-1943 (1964).