Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianfranco Panella

Osservazione riguardante gli anelli che verificano una condizione di massimo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.6, p. 755–756.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_6_755_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Algebra. — *Osservazione riguardante gli anelli che verificano una condizione di massimo.* Nota di GIANFRANCO PANELLA [(*)], presentata [(**)] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Let R be a ring satisfying the ascending chain condition on left annihilators. It is shown that the lower nil radical of R contains every nil left (or right) ideal of R; hence the lower and the upper nil radical of R coincide.

In questa Nota dimostro che se un anello R verifica la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri, ogni nil ideale destro o sinistro di R appartiene al minimo nil radicale dell'anello; in conseguenza, ogni anello di tale tipo possiede un unico nil radicale.

Aggiungo infine (n. 2) alcune osservazioni inerenti al suddetto risultato.

1. Sia R un anello e sia Q una parte non vuota dell'insieme sostegno di R. $l(\mathrm{Q}) = \{x \in \mathrm{R} \mid x\mathrm{Q} = (0)\}$ è ideale sinistro di R e si dice l'annullatore sinistro di Q. Un anello R verifica *la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri* se ogni famiglia non vuota di annullatori sinistri di parti non vuote dell'insieme sostegno di R ammette elemento massimale.

Un ideale N di un anello R si dice un nil radicale di R se N è nil e se R/N è un anello privo di ideali nilpotenti non nulli. Il *minimo nil radicale* dell'anello R, intersezione degli ideali primi dell'anello, è contenuto in ogni nil radicale di R; il *massimo nil radicale* dell'anello R, unione dei nil ideali dell'anello, contiene ogni nil radicale di R.

Premesso ciò, proviamo anzitutto il

LEMMA: *Siano* D *un nil ideale destro,* S *un nil ideale sinistro,* P *un ideale primo dell'anello* R. *Se* R *verifica la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri, risulta* $\mathrm{D}, \mathrm{S} \subset \mathrm{P}$.

Dimostrazione. – Posto $\mathrm{T} = \{x \in \mathrm{D} \mid x \notin \mathrm{P}\}$, per provare che $\mathrm{D} \subset \mathrm{P}$ occorre e basta stabilire che T è l'insieme vuoto. Si consegue tale risultato mostrando che è assurdo supporre T non vuoto, ossia che è assurdo supporre che la famiglia $\mathrm{M} = \{l(x) \mid x \in \mathrm{T}\}$ di ideali sinistri di R sia non vuota.

Supposta all'uopo M non vuota, si osservi, preliminarmente, che le ipotesi $x \in \mathrm{T}$ ed $l(x)$ massimale in M comportano $x^2 \in \mathrm{P}$. Infatti, da $x^2 \notin \mathrm{P}$ discende $x^2 \in \mathrm{T}$ e $l(x) = l(x^2)$. Da ciò deriva $l(x) = l(x^k)$ per ogni numero naturale k, poiché, se $l(x) = l(x^2) = \cdots = l(x^{k-1})$, $k - 1 \geq 2$, e $y \in l(x^k)$ risulta $yx \in l(x^{k-1}) = l(x)$, quindi $yx^2 = 0$ e, in definitiva, $y \in l(x) = l(x^2)$. Ma $x \in \mathrm{D}$ è nilpotente; si ha perciò $l(x) = \mathrm{R}$, $\mathrm{R}x = 0$, $x \in \mathrm{P}$, in contraddizione con la definizione di x.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1967.

Sia poi ancora $x \in \mathrm{T}$ con $l(x)$ massimale in M. Dall'inclusione $l(x) \subseteq l(xr)$, valida per ogni elemento r di R, deriva $xr \in \mathrm{P}$ oppure $l(x) = l(xr)$ e, per quanto precedentemente provato, $(xr)^2 \in \mathrm{P}$. Quindi, ogni elemento dell'ideale destro $x\mathrm{R}$ dell'anello R ha il quadrato in P. Ne deriva: $(xr - xs)^2 \in \mathrm{P}$ per ogni scelta di r e s in R, cioè $xrxsxr = 0$ (mod P) per ogni scelta di r ed s in R. Ma allora $x \in \mathrm{P}$, e si ottiene una contraddizione dall'ipotesi: «T non è l'insieme vuoto». È così provato che $\mathrm{D} \subset \mathrm{P}$.

Sia infine $z \in \mathrm{S}$. L'ideale destro $z\mathrm{R}$ dell'anello R è nil, perciò per quanto già stabilito, $z\mathrm{R} \subset \mathrm{P}$. Ne consegue che l'insieme $\mathrm{SR} \subset \mathrm{P}$, onde $\mathrm{S} \subset \mathrm{P}$; e ciò completa la dimostrazione del lemma.

Come corollario immediato del lemma e della definizione di minimo nil radicale di un anello, si ottiene la seguente

PROPOSIZIONE: *Se un anello* R *verifica la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri, ogni suo nil ideale destro o sinistro è contenuto nel minimo nil radicale dell'anello. In particolare, ogni nil radicale di* R *coincide con il minimo nil radicale dell'anello.*

2. Aggiungiamo alcune osservazioni relative alla proposizione precedente.

Se l'anello R si suppone noetheriano (a sinistra) il risultato conseguito è corollario immediato di un teorema di J. Levitzki ([3] (1), pag. 199), secondo il quale ogni nil ideale destro o sinistro di un anello noetheriano (a sinistra) risulta nilpotente. Da notare, però, che questo teorema non si può trasportare agli anelli che verificano la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri; l'affermazione poggia su di un esempio, dovuto a E. Sasiada, che si può controllare in [1] (p. 85).

Inoltre, in [2], è provato che se un nil anello R verifica la condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri, ogni immagine omomorfa di R, che sia non nulla, possiede un ideale non nullo nilpotente; a partire da tale risultato, è possibile fornire una nuova dimostrazione di quanto stabilito al n. 1. Tale dimostrazione si ottiene stabilendo, successivamente, i seguenti fatti:

La condizione della catena ascendente sugli annullatori sinistri si trasporta da R ad ogni suo sottoanello. Se, quindi, $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{R})$ è il massimo nil radicale di R risulta $\mathrm{U} = \mathrm{L}(\mathrm{U})$ = minimo nil radicale di U. Ma, allora, $\mathrm{U} = \mathrm{L}(\mathrm{R})$ = minimo nil radicale di R. Se, inoltre, D è nil ideale destro (sinistro) di R, $\mathrm{D} = \mathrm{L}(\mathrm{D})$ comporta che D è localmente nilpotente; D appartiene, quindi, al nil radicale di Levitzki di R. Infine, $\mathrm{D} \subset \mathrm{U} = \mathrm{L}(\mathrm{R})$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] I. N. HERSTEIN, *Topics in ring theory*, Mathematics Lecture Notes, University of Chicago (1965).

[3] I. N. HERSTEIN e L. SMALL, *Nil rings satisfying certain chain conditions*, «Canad. J. Math.», *16*, 771–776 (1964).

[3] N. JACOBSON, *Structure of rings*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. XXXVIII, Revised Edition (1964).

(1) I numeri in [ ] rimandano alla bibliografia in fine.