ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARIALUISA DE SOCIO

**Considerazioni sull'influenza di uno strato di gas
ionizzato non lineare nella propagazione di un campo
elettro-magnetico piano**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.5, p. 656-661.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_656_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Considerazioni sull'influenza di uno strato di gas ionizzato non lineare nella propagazione di un campo elettromagnetico piano*^(*). Nota di MARIALUISA DE SOCIO, presentata^(**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The following theorem is stated: a plane electromagnetic field, travelling perpendicularly to a plasma layer, is not altered, in a second approximation, by the plasma.

The theorem is verified even 1) when impacts among electrons and molecules are considered 2) for non-homogeneous plasma with density of the electricized particles which varies with the height. 3) when a uniform magnetic field works perpendicularly to the plasma layer.

1. In una Nota precedente⁽¹⁾ ho dimostrato che in un gas ionizzato omogeneo che riempie tutto lo spazio, se si trascura la variazione del numero dei corpuscoli elettrizzati e gli urti fra essi e le molecole neutre (o più in generale i termini dissipativi), il campo magnetico generato da una sorgente elettromagnetica non viene influenzato dai termini non lineari (di Lorentz e d'inerzia⁽²⁾), che compaiono nell'equazione che determina la velocità dei corpuscoli mentre detto termine esercita una piccola influenza sul campo elettrico della medesima onda.

Recentemente Tin Wei Tang⁽³⁾ ha considerato il caso di un plasma che occupa il semispazio $z > 0$ ed è non omogeneo (precisamente ha la densità dei corpuscoli elettrizzati variabile linearmente con la (z)), mentre il semispazio $z < 0$ è occupato da un mezzo ordinario omogeneo.

Trascurando i termini dissipativi e limitandosi ad onde piane sinusoidali che si propagano parallelamente all'asse z , l'autore ora citato ha dimostrato che in seconda approssimazione, il campo esternamente al plasma è lo stesso, si tenga conto o no dei termini non lineari, qualora, s'intende, il campo in tutto lo spazio dipenda solo da z oltre che dal tempo t .

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 4 del Comitato Nazionale delle Matematiche del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1967.

(1) M. DE SOCIO, *Influenza di alcuni termini non lineari sul campo elettromagnetico in un gas ionizzato*, « Atti Acc. Naz. dei Lincei », 38, 860-865 (1965).

(2) Come ho detto in altre mie Note: per esempio *Sulla propagazione delle onde sferiche in un gas ionizzato non lineare*, « Atti Acc. Scienze - Torino », 99, 617-636 (1964-65), intenderò per termine d'inerzia il termine non lineare che appare nella derivata sostanziale della velocità media dei corpuscoli.

(3) TIN WEI TANG, *Harmonic generation by an Electromagnetic Wave in an inhomogeneous Isotropic Plasma*, « IEEE Transactions on antennas and Propagation », 14, 54-62 (1966).

In questo lavoro riprendo i procedimenti della mia Nota citata e, considerando il plasma per maggior generalità confinato nello strato compreso tra i piani $z = 0$ e $z = d$ (il mezzo all'esterno sia sempre un dielettrico ordinario per semplicità omogeneo), ottengo il risultato del Tin Wei Tang esteso a un campo variabile col tempo con legge qualunque (purché soddisfacente a poco restrittive condizioni iniziali) e in un plasma anche non omogeneo, con densità dei corpuscoli elettrizzati variabile in assenza del campo solo con z , ma con legge qualunque. Provo inoltre che il teorema è valido anche se si tien conto dei termini dissipativi, o meglio degli urti tra gli elettroni e le molecole e inoltre anche se sul gas ionizzato agisce un campo magnetico costante parallelo all'asse z .

La dimostrazione da me esposta, completamente diversa da quella del Tin Wei Tang (4), mi sembra inoltre più semplice e più rigorosa.

2. Supponiamo, come accennato, che nello spazio si propaghi parallelamente all'asse z un'onda piana (ovvero un campo elettromagnetico dipendente solo da z e da t), generata da una sorgente posta nel semispazio $z < 0$ ed a distanza infinitamente grande dal plasma. L'onda giunga ad incidere sul plasma all'istante $t = 0$, cioè per $t < 0$ sia nullo il campo per $z \geq 0$. Per $z < 0$ e $t < 0$ si ha perciò un'onda ordinaria che si propaga nel verso positivo dell'asse z e i cui campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{H}$ soddisfano alle equazioni di Maxwell ordinarie:

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{cases}$$

ove ϵ_0 e μ rappresentano rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo.

Per $t > 0$ l'onda penetra nel plasma e per studiarne la propagazione dobbiamo considerare le equazioni di Maxwell nel plasma, cioè, per $0 < z < d$ (5):

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + Ne \mathbf{v} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{cases}$$

cui si devono associare le equazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \mathbf{v} \mathbf{v} - \left[\operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \left(\operatorname{rot} \mathbf{v} + \frac{e\mu}{m} \mathbf{H} \right) \times \mathbf{v} \right] \\ \operatorname{div} (N\mathbf{v}) + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

(4) Questo autore introduce nell'equazione che determina la velocità media dei corpuscoli elettrizzati la divergenza di un tensore, che però in seconda approssimazione risulta nulla. Noi trascuriamo comunque le azioni di carattere non elettromagnetico.

(5) Ammettiamo per semplicità che la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del gas costituente il plasma (qualora non sia ionizzato) siano ancora ϵ_0 e μ .

dove si è indicato con N la densità degli elettroni, con e, m, v la loro carica, massa e velocità media, con ν il numero degli urti con le molecole neutre per unità di tempo; trascuriamo al solito il moto degli ioni positivi.

Nel semispazio $z > d$ valgono poi ancora le (1).

Ora ammettiamo ϵ_0, μ e ν costanti, supponiamo invece, per maggior generalità, N funzione di z all'istante $t = 0$. Il sistema formato dalle (2) e (3) è pertanto un sistema di quattro equazioni differenziali alle derivate parziali nelle quattro incognite $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}, N$ e per le nostre ipotesi risulta, per $0 < z \leq d$, soddisfacente alle condizioni iniziali:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{v} = 0 \quad N = N_0(z),$$

(con $N_0(z)$ indichiamo il valore di N all'istante $t = 0$), mentre per $z < 0$ e sempre per $t = 0$ si ha il campo di un'onda piana che si propaga nel verso positivo dell'asse z e per $z > d$ e $t = 0$ è ancora $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$.

Per risolvere le (2) e (3) applichiamo un metodo di perturbazione o meglio di approssimazioni successive, molto comune in questi problemi non lineari e di cui ammettiamo la validità. Supponiamo cioè che la sorgente del campo sia proporzionale a un parametro η , che trattiamo come una quantità molto piccola, e che $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}$ e N siano esprimibili in ogni istante nella forma.

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \eta \mathbf{E}_1 + \eta^2 \mathbf{E}_2 + \eta^3 \mathbf{E}_3 + \dots \\ \mathbf{H} = \eta \mathbf{H}_1 + \eta^2 \mathbf{H}_2 + \eta^3 \mathbf{H}_3 + \dots \\ \mathbf{v} = \eta \mathbf{v}_1 + \eta^2 \mathbf{v}_2 + \eta^3 \mathbf{v}_3 + \dots \\ N = N_0 + \eta N_1 + \eta^2 N_2 + \dots; \end{array} \right.$$

sostituiamo poi nel sistema formato dalle equazioni (2) e (3). Queste in prima approssimazione si scrivono, nel plasma ⁽⁶⁾:

$$\begin{array}{l} (6a) \\ (6b) \\ (6c) \\ (6d) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial z} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + N_0 e \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 - \nu \mathbf{v}_1 \\ \operatorname{div} (N_0 \mathbf{v}_1) + \frac{\partial N_1}{\partial t} = 0, \end{array} \right.$$

con:

$$(7) \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{v}_1 = N_1 = 0 \quad \text{per } t \leq 0.$$

All'esterno del plasma valgono ancora le (6a) e (6b) con $N_0 = 0$.

(6) Se $\mathbf{u}$ è funzione della sola coordinata spaziale z è: $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$, dove $\mathbf{k}$ è il versore dell'asse z .

Risolte le equazioni ora scritte e tenendo conto delle condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico sui piani $z = 0$ e $z = d$, si dimostra, com'è ben noto, che per $t > 0$ e $z < 0$ si ha oltre l'onda diretta generata dalla sorgente, anche un'onda che si propaga nel verso negativo dell'asse z (onda riflessa) e per $z > d$ un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse z (onda trasmessa oltre il plasma) (7).

A noi interessa, in modo particolare, provare che il campo $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{v}_1$ sono entro il plasma trasversali, ovvero che questi vettori sono normali all'asse z . Ora proiettando la (6 b) sull'asse z , si ha: $\frac{\partial H_{1z}}{\partial t} = 0$, quindi H_{1z} identicamente nullo, essendo tale all'istante iniziale. Proiettando poi (6 a) e (6 c) sempre sull'asse z , si ottiene:

$$(8) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial E_{1z}}{\partial t} + N_0 e v_{1z} = 0 \\ \frac{\partial v_{1z}}{\partial t} = \frac{e}{m} E_{1z} - v v_{1z} = 0 \end{cases}$$

e questo sistema, unito alle condizioni iniziali $E_{1z} = v_{1z} = 0$, dimostra, fissato z , che in ogni istante E_{1z} e v_{1z} sono identicamente nulli e quindi il campo e $\mathbf{v}_1$ trasversali, come affermato.

Da $v_{1z} = 0$ e da (6 d) segue poi $\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0$ e quindi N_1 identicamente nullo, essendo tale per $t = 0$.

Consideriamo ora le (2) e (3) in seconda approssimazione. Si hanno le equazioni:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_2 = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} + N_0 e \mathbf{v}_2 \\ \text{rot } \mathbf{E}_2 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_2 - v \mathbf{v}_2 - \left[\text{grad } \frac{v_1^2}{2} + \left(\text{rot } \mathbf{v}_1 + \frac{e\mu}{m} \mathbf{H}_1 \right) \times \mathbf{v}_1 \right] \\ \text{div } (N_0 \mathbf{v}_2) + \frac{\partial N_2}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

valide per $0 < z < d$, mentre all'esterno del plasma valgono ancora le (1) in cui, in luogo di $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$, si deve porre $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2$. In tutto lo spazio sarà poi $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$ per $t = 0$ (8). Perciò le equazioni valide all'esterno e all'interno

(7) Nel caso di onde piane sinusoidali e N_0 costante per la soluzione del sistema (6) con le date condizioni iniziali e al contorno si veda per esempio D. GRAFFI; *Onde Elettromagnetiche*, C.N.R. 1965, Cap. II, § 2.3. Nel caso di onde non sinusoidali e N_0 costante si possono usare per determinare il campo nel plasma le considerazioni di D. GRAFFI; *Sulla propagazione nei mezzi dispersivi*, «Ann. di Mat.», 4, 173-194 (1963). Se N_0 è funzione di z , ammessa l'esistenza della soluzione per le (6) nell'interno del plasma, è facile dimostrare l'esistenza dell'onda riflessa nel semispazio $z < 0$ e dell'onda trasmessa nel semispazio $z > d$.

(8) Questo è ovvio per $z > 0$. Per $z < 0$ si ha per $t = 0$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ e quindi $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$.

del plasma con le condizioni di continuità sui piani $z = 0$ e $z = d$ e per le componenti tangenziali di $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2$ determinano questi vettori in modo univoco (9).

Poiché $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{H}_1$ e $\text{rot } \mathbf{v}_1$ (ricordiamo che $\mathbf{v}_1$ dipende dalla sola coordinata spaziale z) sono normali all'asse z , si ha che il vettore:

$$(10) \quad \mathbf{r} = \text{grad} \frac{v_1^2}{2} + \left(\text{rot } \mathbf{v}_1 + \frac{e\mu}{m} \mathbf{H}_1 \right) \times \mathbf{v}_1$$

è costantemente diretto come l'asse z e dipende solo da t e z ; si potrà quindi scrivere:

$$(11) \quad \mathbf{r} = f(z, t) \mathbf{k},$$

se $f(z, t)$ è una funzione di z , nulla per $t = 0$.

Ora le prime due equazioni di (9) sono soddisfatte ponendo:

$$(12) \quad \mathbf{H}_2 = 0 \quad \mathbf{E}_2 = \varphi(z, t) \mathbf{k} \quad \mathbf{v}_2 = - \frac{\epsilon_0}{N_0 e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{k},$$

ove φ è una funzione di z e t ; la terza delle (9) sarà anch'essa soddisfatta se:

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + v \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{N_0 e^2}{m \epsilon_0} \varphi = \frac{N_0 e}{\epsilon_0} f,$$

equazione che, tenendo conto delle condizioni iniziali $\mathbf{E}_2 = \mathbf{v}_2 = 0$, verificate ponendo $\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ per $t = 0$, fornisce la soluzione:

$$(14) \quad \varphi = \frac{N_0 e}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{N_0 e^2}{m \epsilon_0} - \frac{v^2}{4}}} \int_0^t e^{-\frac{v}{2}(t-\tau)} \text{sen} \sqrt{\frac{N_0 e^2}{m \epsilon_0} - \frac{v^2}{4}} (t - \tau) f(z, \tau) d\tau.$$

Pertanto le (12), con φ data da (14), assieme alla $N_2 = \frac{\epsilon_0}{e} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, soddisfano alla (9). All'esterno del plasma si può porre $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$. Restano così soddisfatte anche le condizioni di continuità sui piani $z = 0$, $z = d$, essendo $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2$ longitudinali nel plasma. Allora le (12) nel plasma ed $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$ all'esterno, rappresentano, per il teorema di unicità, il termine di seconda approssimazione. Vale quindi il teorema: *Uno strato di plasma in cui si propaghi in direzione ad esso perpendicolare un campo elettromagnetico piano, non altera, in seconda approssimazione, il campo all'esterno dello strato stesso.*

3. Supponiamo ora che lo strato di plasma subisca l'azione di un campo magnetico costante $\mathbf{H}_0$, diretto come l'asse z .

In prima approssimazione valgono ancora le (6), salvo che nella (6c) occorre aggiungere a secondo membro il termine $-\frac{e\mu}{m} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{v}_1$. Però questo

(9) Questo teorema si può provare in vari modi per esempio anche col procedimento esposto nella mia Nota citata in (1), sostituendo alla sfera Σ due piani $z = h$, $z = -h$, con h sufficientemente grande, che si avvicinano con velocità $v > \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu}}$.

termine è normale all'asse z , restano quindi ancora valide le (8) e la $\frac{\partial H_{1z}}{\partial t} = 0$; $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{v}_1$ sono ancora trasversali e di conseguenza è $N_1 = 0$.

Allora in seconda approssimazione valgono ancora le (9), purché nella terza a secondo membro si aggiunga il termine $-\frac{e\mu}{m}\mathbf{H}_0 \times \mathbf{v}_2$. Le equazioni così ottenute sono ancora soddisfatte in modo univoco nel plasma dalle (12) con φ data da (14) (infatti per le (12) $\mathbf{v}_2$ risulta parallelo a $\mathbf{k}$, quindi il termine $-\frac{e\mu}{m}\mathbf{H}_0 \times \mathbf{v}_2$ risulta nullo), all'esterno del plasma da $\mathbf{E}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$.

Si ha così che il teorema enunciato nel paragrafo precedente risulta valido anche in questo caso, come si era affermato nella prefazione.