Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Sulle piccole oscillazioni di corde e travi elastiche. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.5, p. 646–655.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_646_0>

Meccanica. — *Sulle piccole oscillazioni di corde e travi elastiche.* Nota II di GAETANO CARICATO, presentata [(*)] dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — The study of the vibrations of strings and rods by means of Riemann's method, which was begun in a previous paper, here is continued. Strings and rods with fixed motion at one end, and a known stress, or an inert body, or an elastic tie at the other, are considered in this paper.

1. In una precedente Nota [(1)], ho studiato le piccole oscillazioni di corde e travi elastiche, aventi un estremo con moto prescritto e l'altro estremo libero, rette da un'equazione alle derivate parziali lineare, iperbolica, del tipo [(2)]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{S}(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

con lo scopo di precisare come, utilizzando opportunamente il metodo di Riemann, si possa ottenere, in modo semplice e direttamente in funzione dei dati, lo spostamento del generico punto di ognuno dei corpi suddetti all'istante generico. Nella presente Nota considero gli stessi corpi, con gli stessi tipi di oscillazioni, ammetto ancora che ad un estremo sia prescritto il moto, ma suppongo che l'altro presenti una delle seguenti circostanze: *a*) la tensione sia una funzione assegnata; *b*) ad esso sia attaccato un corpo inerte; *c*) sia soggetto a un vincolo elastico. E applicando il metodo di Riemann con gli stessi criteri adottati nella Nota I, preciso come debba essere completata la legge di composizione della soluzione, enunciata nella Nota I; tale legge fornisce soltanto per il caso *a*) un'espressione esplicita della soluzione. Per i casi *b*) e *c*) mi limito a supporre che le funzioni $\mathrm{S}(x)$ e $\mu(x)$ si riducano a due costanti, e mostro come si possa esprimere, mediante i dati, lo spostamento del punto generico al generico istante.

2. I DATI E LE CONDIZIONI AGLI ESTREMI. – Scritta l'equazione indefinita (1) nella forma

$$f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \left(f(x) = \frac{\mathrm{S}(x)}{\mu(x)}, h(x) = \frac{1}{\mu}\frac{d\mathrm{S}}{dx}\right) \tag{1$'$}$$

ci si propone di determinare nella semistriscia Σ

$$0 \leq x \leq l \quad , \quad t \geq 0 \qquad (\Sigma)$$

una soluzione della (1)′ che soddisfi le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{u}_0(x) \qquad (0 \leq x \leq l) \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 13 maggio 1967.

(1) *Sulle piccole oscillazioni di corde e travi elastiche.* Nota I, « Rendiconti Accademia Naz. Lincei », *42*, fasc. 3 (1967). Nel seguito riferendomi a questa dirò brevemente « Nota I ».

(2) Si conservano tutte le notazioni della Nota I.

e una delle seguenti coppie di condizioni agli estremi (3), corrispondenti rispettivamente ai casi *a*), *b*), *c*):

$$u(0, t) = \zeta(t) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = \mathrm{N}(t), \qquad [\xi(0) = 0] \tag{3}$$

$$u(0, t) = \zeta(t) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -k\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)_{x=l}, \tag{4}$$

$$u(0, t) = \zeta(t) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -h\,u(l, t), \tag{5}$$

$u_0(x)$, $\dot{u}_0(x)$, $\zeta(t)$, $\mathrm{N}(t)$ essendo funzioni assegnate, continue con la loro derivata prima, h una costante elastica (positiva) e k il rapporto tra la massa M del punto materiale pesante applicato nell'estremo B di coordinata $x = l$ e il valore che $\mathrm{S}(x)$ assume in B $\left(k = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{S}(l)}\right)$.

3. LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLA SOLUZIONE E CASO *a*). – Eseguita con l'ausilio delle due famiglie di curve caratteristiche della (1)',

$$t \pm p(x) = \text{cost.} \quad , \quad p(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}},$$

la trasformazione di coordinate $\xi = \frac{1}{2}(t - p(x))$, $\eta = \frac{1}{2}(t + p(x))$, si pensi tradotto il problema nel corrispondente piano cartesiano rappresentativo (4) (A, ξ, η). Finché il punto $\overset{\approx}{\mathrm{Q}} \equiv (\xi, \eta)$ appartiene al triangolo $\overset{\approx}{\mathrm{T}}_1$ limitato dalle rette

$$\xi + \eta = 0 \quad , \quad \xi = 0 \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}p(l) \qquad (\overset{\approx}{\mathrm{T}}_1), \tag{6}$$

la relazione (5)

$$\int_{\mathrm{FR}} \Phi\, ds \equiv \int_{\mathrm{FR}} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\cos\widehat{n\xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\cos\widehat{n\eta}\right)w - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\cos\widehat{n\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi}\cos\widehat{n\eta}\right)v + \right.$$
$$\left. + vwm(\cos\widehat{n\xi} - \cos\widehat{n\eta}) \right\} ds = 0 \tag{7}$$

applicata al triangolo $\overset{\approx}{\mathrm{Q}}\overset{\approx}{\mathrm{M}}\overset{\approx}{\mathrm{N}}$, ove $\overset{\approx}{\mathrm{M}}$, $\overset{\approx}{\mathrm{N}}$ sono le intersezioni con l'asse $\xi + \eta = 0$ delle curve caratteristiche condotte per $\overset{\approx}{\mathrm{Q}}$, dà

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\left[(vw)_{\overset{\approx}{\mathrm{M}}} + (vw)_{\overset{\approx}{\mathrm{N}}}\right] - \frac{1}{2}\int_{\overset{\approx}{\mathrm{M}}}^{\overset{\approx}{\mathrm{N}}} \overset{\approx}{\varphi}\, d\eta\,; \tag{8}$$

(3) Cfr. G. KRALL, *Meccanica Tecnica delle vibrazioni*, Zanichelli, Bologna, Parte II, cap. VIII, § 2, n. 2 e Cap. XIII, p. 6, n. 3.

(4) Cfr. figura in Nota I.

(5) Cfr. Nota I (17).

e quindi nell'originario piano (A, x, t), per il corrispondente punto $Q \equiv (x, t)$ contenuto nel triangolo T_1

$$(9) \qquad t = 0 \quad , \quad t = p(x) \quad , \quad t = -p(x) + p(l) \qquad (T_1),$$

indicate con ν e $\varphi \equiv 2 \left\{ u_0(x) \frac{\partial \nu}{\partial t} - \dot{u}_0(x)\, \nu \right\}_{t=0}$ le trasformate delle funzioni v e $\tilde{\varphi}$, sussiste la formula

$$(8)' \qquad u(x, t) = \frac{1}{2}\left[(u\nu)_M + (u\nu)_N\right] - \frac{1}{4}\int_M^N \frac{\varphi}{\sqrt{f}}\, dx$$

con $M \equiv [q(p(x) - t), 0]$, $N \equiv [q(p(x) + t), 0]$, $q(y)$ rappresentando la funzione inversa di $y = p(x)$.

Quando si considera un punto $\tilde{Q} \equiv (\xi, \eta)$ di $\tilde{\Sigma}$ esterno al triangolo $\tilde{T}_1$, per poter applicare la relazione (7) con dominî R non contenuti in $\tilde{\Sigma}$, occorre eseguire il prolungamento dei dati. Si supporrà senz'altro effettuato tale prolungamento come in Nota I, con la sola differenza che la funzione $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \equiv \frac{1}{2\sqrt{f}}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)$ [cfr. Nota I, (16)] anche ora continua rispetto alla variabile x sulle rette $b_{\pm(2n+1)l}$, verifichi su queste rette le condizioni

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x = \pm(2n+1)l} = -k \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^+(l, t) \qquad \text{nel caso } b)$$

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x = \pm(2n+1)l} = -h\, u^+(l, t) \qquad \text{nel caso } c)$$

ove il segno $^+$ indica che le funzioni $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sono valutate sul bordo della retta b corrispondente al bordo della retta $\tilde{b}$ che l'osservatore vede a destra in figura.

Ciò posto, si potrà utilizzare la (7) con gli stessi criteri usati in Nota I.

Si scelga, per esempio, un punto $\tilde{Q} \equiv (\xi, \eta)$ contenuto nel triangolo

$$\eta - \xi = 0 \quad , \quad \xi = \frac{5}{2} p(l) \quad , \quad \eta = 3 p(l);$$

i segmenti di caratteristiche condotte per esso, $\tilde{Q}\tilde{M}$, $\tilde{Q}\tilde{N}$ intersecano l'uno le rette $\tilde{b}, \tilde{a}_2, \tilde{b}_3, \tilde{a}_4, \tilde{b}_5$ e l'altro le rette $\tilde{a}, \tilde{b}_{-1}, \tilde{a}_{-2}, \tilde{b}_{-3}, \tilde{a}_{-4}, \tilde{b}_{-5}$. Se si pone (cfr. fig. contenuta in Nota I)

$$\tilde{\mathfrak{J}}(\tilde{\varphi}) \equiv \frac{1}{2}\left[\int_{\tilde{M}}^{\tilde{B}_{-5}} - \int_{\tilde{B}_{-5}}^{\tilde{B}_{-3}} + \int_{\tilde{B}_{-3}}^{\tilde{B}_{-1}} - \int_{\tilde{B}_{-1}}^{\tilde{B}} + \int_{\tilde{B}}^{\tilde{B}_3} - \int_{\tilde{B}_3}^{\tilde{B}_5} + \int_{\tilde{B}_5}^{\tilde{N}}\right] \tilde{\varphi}\, d\eta\,,$$

$$\tilde{\delta}(\tilde{B}, \tilde{E}) \equiv \int_{\tilde{B}}^{\tilde{E}} v\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) d\eta\,, \cdots$$

si ottiene

$$w_{\tilde{\tilde{Q}}} = -\frac{1}{2}[(vw)_{\tilde{\tilde{M}}} + (vw)_{\tilde{\tilde{N}}}] + \tilde{\tilde{\mathfrak{J}}}(\tilde{\tilde{\varphi}}) + \tilde{\alpha}(A, \tilde{\tilde{I}}) - \tilde{\alpha}(A_{-2}, \tilde{\tilde{K}}) + \tilde{\alpha}(\tilde{\tilde{A}}_{-4}, \tilde{\tilde{U}}) +$$
$$+ \tilde{\tilde{\gamma}}(\tilde{\tilde{A}}_2, \tilde{\tilde{F}}) - \tilde{\tilde{\gamma}}(\tilde{\tilde{A}}_4, \tilde{\tilde{R}}) - \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}_{-5}, \tilde{\tilde{\theta}}) + \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}_{-3}, \tilde{\tilde{L}}) - \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}_{-1}, \tilde{\tilde{J}}) +$$
$$+ \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}, \tilde{\tilde{E}}) - \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}_3, \tilde{\tilde{H}}) + \tilde{\tilde{\delta}}(\tilde{\tilde{B}}_5, \tilde{\tilde{S}})$$

e di conseguenza, per il punto $Q \equiv (x, t)$ corrispondente nel piano (A, x, t), che appartiene al triangolo mistilineo

$$(12) \qquad x = 0 \quad , \quad t = p(x) + 5p(l) \quad , \quad t = -p(x) + 6p(l),$$

si ha

$$(13) \qquad \begin{cases} u(x,t) = -\frac{1}{2}[(u\nu)_M + (u\nu)_N] + \mathfrak{J}(\varphi) + \alpha(A, I) - \alpha(A_{-2}, K) + \\ \quad + \alpha(A_{-4}, U) + \gamma(A_2, F) - \gamma(A_4, R) - \delta(B_{-5}, \theta) + \\ \quad + \delta(B_{-3}, L) - \delta(B_{-1}, J) + \delta(B, E) - \delta(B_3, H) + \delta(B_5, S) \end{cases}$$

con

$$(14) \qquad \mathfrak{J}(\varphi) = \frac{1}{4}\left[\int_M^{B_{-5}} - \int_{B_{-5}}^{B_{-3}} + \int_{B_{-3}}^{B_{-1}} - \int_{B_{-1}}^{B} + \int_{B}^{B_3} - \int_{B_3}^{B_5} + \int_{B_5}^{N}\right] \frac{\varphi}{\sqrt{f}}\, dx$$

$$(15) \qquad \delta(B, E) \equiv \int_0^{t_E} \left(\nu \sqrt{f}\, \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} dt \quad , \quad \delta(B_{-1}, J) \equiv \int_0^{t_J} \left(\nu \sqrt{f} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=-l} dt, \ldots$$

e inoltre

$$(16) \qquad \begin{cases} M \equiv [q(p(x) - t), 0] \quad , \quad N \equiv [q(p(x) + t), 0]; \\ \qquad A_{\pm 2nl} \equiv (\pm 2nl, 0) \quad , \quad A_0 \equiv A, \\ B_{\pm(2n+1)} \equiv (\pm(2n+1)l, 0) \quad , \quad B \equiv B_1 \quad , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ \qquad I \equiv (0, t - p(x)) \quad , \quad J \equiv (-l, t - p(x) - p(l)), \\ K \equiv (-2l, t - p(x) - 2p(l)) \quad , \quad L \equiv (-3l, t - p(x) - 3p(l)), \\ \qquad U \equiv (-4l, t - p(x) - 4p(l)), \\ \Theta \equiv (-5l, t - p(x) - 5p(l)) \quad ; \quad E \equiv (l, t + p(x) - p(l)), \\ \qquad F \equiv (2l, t + p(x) - 2p(l)), \\ H \equiv (3l, t + p(x) - 3p(l)) \quad , \quad R \equiv (4l, t + p(x) - 4p(l)), \\ \qquad S \equiv (5l, t + p(x) - 5p(l)). \end{cases}$$

Quando si verifica il caso *a*), sussistono le condizioni (2) e (3); risulta quindi $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\pm(2n+1)l} = N(t)$, e per Q appartenente al dominio (12) la (13) fornisce la formola risolutiva. In particolare per $N(t) \equiv 0$ gli integrali (15) sono nulli e la (13) viene a coincidere con la formola risolutiva del problema trattato nella Nota I. Come si potrebbe costatare, per $\mathring{Q}$ comunque posto in $\mathring{\Sigma}$, la legge di composizione della soluzione si ottiene « ampliando quella data in Nota I con l'aggiunta, in corrispondenza alle intersezioni degli archi di caratteristiche $\widehat{QM}$, $\widehat{QN}$ con le rette $b_{\pm(2n+1)}$ ($n = 0, 1, 2, \cdots, b_1 \equiv b$), degli integrali (15) presi col segno $+$ o col segno $-$ a seconda che n sia pari o dispari ove l'indice è positivo, e a seconda che n sia dispari o pari ove l'indice è negativo ».

Mediante la legge ora enunciata non si ottengono nei casi *b*) e *c*) le formole risolutive del problema, perché nelle funzioni δ, in virtù delle condizioni (10) o (11) viene a comparire la derivata seconda temporale della funzione incognita $u(x, t)$ o la funzione $u(x, t)$ medesima.

4. DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE NEI CASI *b*) e *c*) *per* $f(x) = \text{cost.}$, $h(x) \equiv 0$. – Si costaterà ora che la legge di composizione della soluzione, enunciata poc'anzi, permette ugualmente di ottenere formole risolutive elementari del problema nei casi *b*) e *c*) se ci si limita a supporre $f(x) = \text{cost.}$, $h(x) \equiv 0$.

Infatti, posto in tal caso $f(x) = V^2$, e avendosi [6]

$$p(x) = \frac{x}{V} \quad , \quad \nu \equiv 1 \quad , \quad \varphi = -2\dot{u}_0(x) \quad , \quad \psi \equiv 0,$$

$$\int_{B_r}^{B_{r+2}} \frac{\varphi}{\sqrt{f}}\, dx = 0, \qquad (r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots),$$

si cominci col prendere in esame un punto $Q \equiv (x, t)$ di Σ contenuto nel triangolo T_2 di equazioni

$$x = l \quad , \quad t = \frac{l - x}{V} \quad , \quad t = \frac{l + x}{V} \qquad (T_2). \tag{17}$$

In base alla legge di composizione precisata nel n. precedente, si può scrivere allora

$$u(x, t) = n_2(x, t) + V \int_0^{t_E} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} dt \qquad \left(t_E = t - \frac{l - x}{V}\right), \tag{18}$$

avendo posto [7]

$$n_2(x, t) \equiv \frac{1}{2}\left[u_0(x - Vt) - u_0(x + Vt)\right] + \frac{1}{2V}\left[\int_{x-Vt}^{l} \dot{u}_0(\bar{x})\, d\bar{x} - \int_{l}^{x+Vt} \dot{u}_0(\bar{x})\, d\bar{x}\right] +$$
$$+ \zeta\left(t - \frac{x}{V}\right) + \zeta\left(t + \frac{x}{V} - \frac{2l}{V}\right).$$

(6) Cfr. Nota I, n. 5.

(7) Si osservi che $\zeta(t)$ e $\zeta'(t)$ sono da considerare identicamente nulle per $t < 0$.

Poiché sulla retta $b\ (x = l)$ sussiste l'una o l'altra delle condizioni [cfr. (10), (11)]

$$(19) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -\, k \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u^+(l\,,t) \quad , \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = -\, hu^+(l,t)$$

a seconda che nel punto B sia attaccato un carico inerte o sia imposto un vincolo elastico, indicando rispettivamente con $u_m\,,\,u_e$ i due spostamenti, si traggono dalla (18) le due relazioni

$$(20) \quad u_m^+(l,t) = n_2(l,t) - kV \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial \bar t^2} u_m^+(l,\bar t)\, d\bar t \quad , \quad u_e^+(l,t) = n_2(l,t) - hV \int_0^t u_e^+(l,\bar t)\, d\bar t,$$

e da queste, per derivazione (rispetto alla variabile t) seguono le equazioni differenziali

$$(21) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\, u_m^+(l,t) + \frac{1}{kV}\, \frac{d}{dt}\, u_m^+(l\,,t) = \frac{1}{kV}\, \frac{d}{dt}\, n_2(l\,,t)\,,$$

$$\frac{d}{dt}\, u_e^+(l\,,t) + hVu_e^+(l\,,t) = \frac{d}{dt}\, n_2\,(l\,,t)$$

da considerarsi nell'intervallo $0 \leq t \leq \frac{2l}{V}$. Essendo note le condizioni iniziali, le due equazioni (21) forniscono due soluzioni, $u_{m2}(t)\,,\,u_{e,2}(t)$ mediante le quali si ottengono dalla (18) le due formole risolutive, valide in T_2,

$$(22) \qquad u_m\,(x\,,t) = n_2\,(x\,,t) - kV \int_0^{t_E} \frac{d^2}{d\bar t^2}\, u_{m2}(\bar t)\, d\bar t\,;$$

$$u_e\,(x\,,t) = n_2(x\,,t) - hV \int_0^{t_E} u_{e2}(\bar t)\, d\bar t \qquad (T_2).$$

Sia ora $Q \equiv (x\,,t)$ un punto appartenente al triangolo T_3, di equazioni

$$(23) \qquad t = \frac{l+x}{V} \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t = \frac{3l-x}{V} \qquad (T_3).$$

Con tale scelta, posto

$$(24) \qquad n_3(x\,,t) \equiv -\,\frac{1}{2}\,[u_0\,(x - Vt) + u_0\,(x + Vt)] -$$

$$-\,\frac{1}{2V}\left[\int_{x-Vt}^{-l} \dot u_0(\bar x)\, d\bar x + \int_{l}^{x+Vt} \dot u_0(\bar x)\, d\bar x\right] + \zeta\left(t - \frac{x}{V}\right) + \zeta\left(t - \frac{2l-x}{V}\right) - \zeta\left(t - \frac{x+2l}{V}\right)$$

si ha

$$(25) \qquad u\,(x\,,t) = n_3\,(x\,,t) + V\left[\int_0^{t_E} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} dt - \int_0^{t_J} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=-l} dt\right]$$

con $t_E \equiv t - \frac{(l-x)}{V}$, $t_J \equiv t - \frac{(l+x)}{V}$. La (25), a sua volta, tenendo conto delle (10), (11), dà luogo alle due formole

$$(26)\quad \begin{cases} u_m(x\,,t) = n_3(x\,,t) - kV\left[\int\limits_0^{t_E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_m^+(l\,,\bar t)\,d\bar t - \int\limits_0^{t_J} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_m^+(l\,,\bar t)\,d\bar t\right] \\ u_e(x\,,t) = n_3(x\,,t) - hV\left[\int\limits_0^{t_E} u_e^+(l\,,\bar t)\,d\bar t - \int\limits_0^{t_J} u_e^+(l\,,\bar t)\,d\bar t\right]. \end{cases}$$

Si può subito osservare che essendo Q in T_3, sussistono per ogni x le limitazioni

$$(27)\qquad \frac{2x}{V} \le t_E \le \frac{2l}{V} \quad , \quad 0 \le t_J \le \frac{2(l-x)}{V}\,,$$

e le soluzioni $u^+(l\,,t)$ con t nell'intervallo $\left(0\,,\frac{2l}{V}\right)$ sono state già determinate nei due casi mediante le (21). Si possono perciò scrivere le due formole risolutive, per Q in T_3,

$$(28)\qquad u_m(x\,,t) = n_3(x\,,t) - kV\left[\int\limits_0^{t_E} \frac{d^2}{dt^2} u_{m2}(\bar t)\,d\bar t - \int\limits_0^{t_J} \frac{d^2}{dt^2} u_{m2}(\bar t)\,d\bar t\right] \qquad (T_3)$$

$$(29)\qquad u_e(x\,,t) = n_3(x\,,t) - hV\left[\int\limits_0^{t_E} u_{e2}(\bar t)\,d\bar t - \int\limits_0^{t_J} u_{e2}(\bar t)\,d\bar t\right] \qquad (T_3).$$

Si passi al generico punto $Q \equiv (x\,,t)$ del triangolo T_4 di equazioni

$$(30)\qquad x = l \quad , \quad t = \frac{3l-x}{V} \quad , \quad t = \frac{3l+x}{V} \qquad (T_4);$$

in base alla legge di composizione della soluzione si ha

$$(31)\quad \begin{cases} u(x\,,t) = \frac{1}{2}\left[-u_0(x-Vt) + u_0(x+Vt)\right] + \\ \quad + \frac{1}{2V}\left[-\int\limits_{x-Vt}^{-l} \dot u_0(\bar x)\,d\bar x + \int\limits_{3l}^{x+Vt} \dot u_0(\bar x)\,d\bar x\right] + \zeta\left(t - \frac{x}{V}\right) - \zeta\left(t - \frac{2l+x}{V}\right) + \\ \quad + \zeta\left(t - \frac{(2l-x)}{V}\right) - \zeta\left(t - \frac{(4l-x)}{V}\right) + \\ \quad + V\left[-\int\limits_0^{t_H}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=3l} dt + \int\limits_0^{t_E}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} dt - \int\limits_0^{t_J}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=-l} dt\right]. \end{cases}$$

Poiché per ogni x sussistono le relazioni

$$(32)\qquad 0 \le t_H \le \frac{2x}{V} \quad , \quad \frac{2(l-x)}{V} \le t_J \le \frac{2l}{V} \quad , \quad \frac{2l}{V} \le t_E \le \frac{2(l+x)}{V}\,,$$

l'ultimo e il terz'ultimo integrale che compaiono nella formola (31) sono già calcolabili perché sono note nei due casi le rispettive funzioni $u_m^+(l, t)$, $u_e^+(l, t)$ con t nell'intervallo $\left(0, \frac{2l}{V}\right)$. Ne segue che riferita la (31) al caso *b*) e scritta nella forma

$$u_m(x, t) = n_{m4}(x, t) - kV \int_{2l/V}^{t_E} \frac{d^2}{d\bar{t}^2} u_m^+(l, \bar{t})\, d\bar{t}, \tag{33}$$

ove $n_{m4}(x, t)$ rappresenta tutti i termini già valutabili, si trae da essa l'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dt^2} u_m^+(l, t) + \frac{1}{kV} \frac{d}{dt} u_m^+(l, t) = \frac{1}{kV} \frac{d}{dt} n_{m4}(l, t) \tag{34}$$

da considerarsi nell'intervallo $\left(\frac{2l}{V}, \frac{4l}{V}\right)$. Detta $u_{m4}(t)$ la soluzione della (34) che soddisfa le condizioni iniziali assegnate, e sostituita nella (33) si ottiene la formola risolutiva, valida nel triangolo T_4,

$$u_m(x, t) = n_{m4}(x, t) - kV \int_{2l/V}^{t_E} \frac{d^2}{d\bar{t}^2} u_{m4}(\bar{t})\, d\bar{t} \qquad (T_4). \tag{35}$$

In modo analogo, per il caso *c*) si deduce la formola risolutiva, valida in T_4,

$$u_e(x, t) = n_{e4}(x, t) - hV \int_{2l/V}^{t_E} u_{e4}(\bar{t})\, d\bar{t}. \tag{36}$$

È chiaro ormai come si debba proseguire al crescere della grandezza della variabile temporale. La conoscenza delle formule risolutive per i due casi, relative al triangolo T_{2n} $(n > 1)$ di equazioni

$$t = \frac{(2n-1)l - x}{V} \quad , \quad x = l \quad , \quad t = \frac{(2n-1)l + x}{V} \qquad (T_{2n})$$

richiede la preventiva conoscenza delle soluzioni nel triangolo T_{2n-1} $(n > 1)$

$$t = \frac{(2n-3)l + x}{V} \quad , \quad x = 0 \quad , \quad t = \frac{(2n-1)l - x}{V} \qquad (T_{2n-1}).$$

Esempi. — I) Si supponga di avere nel caso *b*) $u_0(x) = 0$, $\dot{u}_0(x) = 0$, e la massa inerte M applicata nell'estremo B enormemente grande rispetto ai valori che assume per ogni valore di t l'espressione

$$Z(t) \equiv \sum_n^{0,1,\cdots} (-1)^n \zeta'\left(t - (2n+1)\frac{l}{V}\right) + \sum_n^{1,2,\cdots} (-1)^{n-1} \zeta'\left(t - (2n-1)\frac{l}{V}\right)$$

$\left(\zeta(\tau) = 0 \text{ per } \tau \le 0, \zeta' \equiv \frac{d\zeta}{dt}\right)$, sì che abbia senso porre $kV = \frac{M}{\sqrt{\mu S}} = \infty$.

Dalle equazioni differenziali (21), (34) e da tutte le analoghe che si ottengono al crescere di t, si trae allora per l'estremo B la condizione

$$u_m^+(l, t) = 0 \qquad \text{per} \quad kV = \infty . \tag{37}$$

II) Si ammetta che nel caso b) per un periodo di tempo maggiore di $4l/V$ la funzione $\zeta(t)$ sia del tipo $\zeta(t) = at^2$ (a, costante positiva), e che le condizioni iniziali siano $u_0(x) = 0$, $\dot{u}_0(x) = 0$. Si vuol valutare agli istanti $t_i = i\frac{l}{V}$ ($i = 1, 2, 3$) il valore della pressione nell'estremo A ($x = 0$).

Limitandosi dapprima all'intervallo $0 \leq t \leq l/V$ si osservi che si ha [cfr. $(20)_1$]

$$n_2(l, t) = 0 \quad , \quad u_m^+(l, t) = -kV\int_0^t \frac{d^2}{d\bar{t}^2} u_m(l, \bar{t})\, d\bar{t} \qquad \text{per} \quad t \leq \frac{l}{V};$$

dalla $(21)_1$ si trae allora

$$u_m^+(l, t) = 0 \qquad \text{per} \quad t \leq \frac{l}{V}. \tag{38}$$

La (22) fornisce di conseguenza

$$[u_m(x, t)]_{t=l/V} = \frac{a}{V^2}(l-x)^2 \quad , \quad \left[\frac{\partial u_m}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ t=l/V}} = -\frac{2\,al}{V^2}. \tag{39}$$

Per $\frac{l}{V} \leq t \leq \frac{2l}{V}$ si ha $n_2(l, t) = 2\,a\left(t - \frac{l}{V}\right)^2$ e, posto $y(t) = u_m^+(l, t)$, l'equazione (21), in virtù delle condizioni iniziali $y(l/V) = y'(l/V) = 0$, ammette la soluzione

$$y(t) = \frac{2\,al^2}{V^2} + 4\,ak(l + kV^2) - 4\,ak^2V^2 e^{\frac{1}{kV}\left(\frac{l}{V} - t\right)} + 2\,at^2 - 4\,a\left(\frac{l}{V} + kV\right)t. \tag{40}$$

Ne seguono, per il tramite della $(26)_1$

$$\left[\frac{\partial u_m}{\partial x}(x, t)\right]_{l=2l/V} = -\frac{4\,a}{V^2}(l-x) + 4\,ak\,e^{-\frac{x}{kV^2}} - 4\,ak \quad , \quad \left[\frac{\partial u_m}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ t=2l/V}} = -\frac{4\,al}{V^2}. \tag{41}$$

Passando al dominio T_4 [cfr. (30)], per valutare $[u_m(x, t)]_{t=3l/V}$ si ha, in base alla (33),

$$y(t) = 2\,a\left(t - \frac{l}{V}\right)^2 + kV\left[\int_0^{t_H} y''(\bar{t})\,d\bar{t} - \int_0^{t_E} y''(\bar{t})\,d\bar{t} + \int_0^{t_J} y''(\bar{t})\,d\bar{t}\right] \quad \text{per} \quad \frac{2l}{V} \leq t \leq \frac{3l}{V}$$

con $t_H = t - \frac{2l}{V}$, $t_E = t$, $t_J = t - \frac{2l}{V}$, e la (34) diventa $y'' + \frac{1}{kV}y' = \frac{4\,a}{kV}\left(t - \frac{l}{V}\right)$.

La soluzione di questa equazione differenziale, che soddisfa le condizioni iniziali

$$y\left(\frac{2l}{V}\right) = 2\,al\left(\frac{l}{V^2} - 2\,k\right) + 4\,ak^2V^2\left(1 - e^{-\frac{l}{kV^2}}\right),$$

$$y'\left(\frac{2l}{V}\right) = 4\,akV\left(e^{-\frac{l}{kV^2}} - 1\right) + \frac{4\,al}{V},$$

ha l'espressione

$$y(t) = 2al\left(\frac{l}{V^2} + 2k\right) + 4ak^2V^2\left[1 - e^{\frac{1}{kV}\left(\frac{l}{V} - t\right)}\right] + 2at^2 - 4a\left(\frac{l}{V} + kV\right)t\,;$$

e la (33) fornisce

$$u_m(x,t) = a\left[t^2 + \frac{x^2}{V^2} + \frac{2x}{V}\left(t - \frac{4l}{V}\right)\right] - kV\left[\int_0^{t_E} y''(\bar{t})\,d\bar{t} - \int_0^{t_J} y''(\bar{t})\,d\bar{t}\right]$$

$$\left(\text{per } \frac{2l}{V} \le t \le \frac{3l}{V}\right),$$

donde segue

$$\left[\frac{\partial u_m}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ t=3l/V}} = -2a\left[\frac{l}{V^2} + 2k\left(1 - e^{-\frac{l}{kV^2}}\right)\right]. \tag{42}$$

Se nelle precedenti formole si pone $k = 0$, ci si riduce ovviamente al caso dell'estremo B libero; e si può verificare che nell'estremo A ($x = 0$), in tal caso, la pressione oscilla con periodo $4l/V$ tra i valori 0 e $4l/V^2$, nonostante la velocità dell'estremo medesimo risulti crescente [8].

(8) Cfr. U. PUPPINI, *Contributo allo studio delle azioni sismiche sugli edifici*, Il «Monitore tecnico» *22*, 72, (1916).