Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Giuliano Sorani

## Sui funtori omologici e coomologici

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **42** (1967), n.5, p. 640–645.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_640_0>

**Topologia.** — *Sui funtori omologici e coomologici.* Nota di GIULIANO SORANI (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Covariant and contravariant cohomological and homological sequences of functors are defined and some examples are studied. A notion of universality of such sequences is also discussed. One of the examples leads to the consideration of a cohomology theory, with coefficients in a sheaf on a special category, which does not satisfy the « dimension » axiom.

1. In [1] D. Buchsbaum ha introdotto le nozioni di successioni di funtori omologiche e coomologiche relativamente ad un dato funtore come casi particolari di successioni connesse e, quando è il caso, di successioni universali di funtori. Ha poi mostrato che la successione dei gruppi di omotopia di Hurevicz di uno spazio è omologica rispetto al funtore $E_1(B, F)$ = fibrazioni con base B e fibra F e che la successione dei gruppi di coomologia singolare, a coefficienti costanti, di uno spazio è coomologica rispetto al funtore $E_2(B, F)$ = cofibrazioni con cobase B e cofibra F. Tali successioni sono anche universali rispetto a tali funtori.

In questa Nota consideriamo altri esempi di tali successioni che, in vario modo, si diversificano dagli esempi considerati in [1]. In particolare esaminiamo alcune successioni di gruppi di omologia per le quali è possibile che la nozione di universalità sia più significativa di quella di esattezza. Ciò è suggerito, ad esempio dalla successione dei gruppi di omologia di Čech che è chiaramente universale, dato che tali gruppi sono definiti come limiti induttivi, ma che, in generale, non è una successione esatta.

Dopo aver considerato, per un fissato spazio X, la classica successione dei gruppi di coomologia a coefficienti in un fascio, definiamo una nuova successione $\{h^n\}$ di gruppi di coomologia a coefficienti in un fascio su una particolare categoria. Tale successione è coomologica, esatta e, in condizioni abbastanza generali, universale; ma non si ha necessariamente $h^0(X, F) \cong \Gamma(X, F)$. Ciò fornisce un esempio di una teoria di coomologia, a coefficienti in un fascio, che, in generale, non soddisfa l'assioma di « dimensione ».

Dagli esempi che qui consideriamo appare opportuno poter distinguere fra i vari casi di successioni omologiche e coomologiche che sono compresi nelle definizioni di D. Buchsbaum. Ne diamo un esempio al n. 5 senza pretesa con ciò di esaurire lo studio di tutti i casi possibili.

Infine osserviamo che, nel definire i funtori che intervengono, ci limitiamo a darne la definizione sugli oggetti in quanto la loro definizione sui morfismi è sempre del tutto ovvia.

Desidero ringraziare D. Buchsbaum per alcune utili discussioni.

(*) The author was partially supported by N.S.F. grant G.P. 6003.
(**) Nella seduta del 13 maggio 1967.

2. In questo numero richiamiamo alcune definizioni e risultati di D. Buchsbaum [1].

Se $\mathcal{A}$ è una categoria si indica con $\mathcal{A}^0$ la categoria opposta. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due categorie si indica con $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la categoria dei funtori da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Se A, B sono due oggetti della stessa categoria $\mathcal{A}$ si indica con $(A, B)_{\mathcal{A}}$ o semplicemente con $(A,B)$ l'insieme delle applicazioni da A a B in $\mathcal{A}$.

Sia $\mathcal{S}$ una categoria con limiti diretti e $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante. Il funtore naturale $H : (\mathcal{B}, \mathcal{S}) \to (\mathcal{A}, \mathcal{S})$ ha un aggiunto sinistro $g_* : (\mathcal{A}, \mathcal{S}) \to (\mathcal{B}, \mathcal{S})$. Ne segue che se $\mathcal{C}$ è una qualsiasi categoria esiste un'applicazione $\omega : (\mathcal{A}, \mathcal{S}) \to$ $\to ((\mathcal{C}, \mathcal{B}), (\mathcal{C}, \mathcal{S}))$ che permette di definire un prodotto tensore di due funtori [1].

*Definizione 1.* – Per F in $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ e T in $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ si definisce $F \otimes_h T = \omega(F)(T)$.

Analogamente se $\mathcal{S}$ ha limiti inversi, per F in $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ e T in $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ si può definire il funtore $F \boxtimes_h T$.

Se ora $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un funtore contravariante e si indica con $h' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}^0$ il funtore covariante associato ad $h$ e, per ogni funtore T in $(\mathcal{C}^0, \mathcal{B})$ si indica con $\tilde{T}$ il suo opposto in $(\mathcal{C}, \mathcal{B}^0)$ si può definire un Hom generalizzato.

*Definizione 2.* – Per F in $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ e T in $(\mathcal{C}^0, \mathcal{B})$ si definisce $\langle T, F \rangle_h = F \boxtimes_{h'} \tilde{T}$.

Ciò stabilito si pongono le seguenti definizioni.

*Definizione 3.* – Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore covariante, $\mathcal{S}$ una categoria con limiti diretti e sia E un funtore in $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Una successione $\{F^n\}$ di funtori in $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ si dice *coomologica rispetto ad* E se, per ogni $n$, c'è una trasformazione naturale $F^n \otimes_h E \to F^{n+1}$.

Una successione $\{F^n\}$ coomologica rispetto ad E si dice *universale rispetto ad* E se, per ogni successione $\{U^n\}$ coomologica rispetto ad E e per ogni applicazione $F^0 \to U^0$, esiste un'unica estensione $F^n \to U^n$, per ogni $n$, tale che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} F^n \otimes_h E \arrow[r] \arrow[d] & F^{n+1} \arrow[d] \\ U^n \otimes_h E \arrow[r] & U^{n+1} \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

*Definizione 4.* – Sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtore contravariante, $\mathcal{S}$ una categoria con limiti inversi e sia E un funtore in $(\mathcal{A}^0, \mathcal{B})$. Una successione $\{F_n\}$ di funtori in $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ si dice *omologica rispetto ad* E se, per ogni $n$, esiste una trasformazione naturale $F_{n+1} \to \langle E, F_n \rangle_h$.

Una successione $\{F_n\}$ omologica rispetto ad E si dice *universale rispetto ad* E se, per ogni successione $\{U_n\}$ omologica rispetto ad E e per ogni applicazione

(1) $\omega$ è la composizione del funtore $g_*$ e del funtore naturale

$$(\mathcal{B}, \mathcal{S}) \to ((\mathcal{C}, \mathcal{B}) \times \mathcal{C}, \mathcal{S}) \cong ((\mathcal{C}, \mathcal{B}), (\mathcal{C}, \mathcal{S})).$$

$U_0 \to F_0$, esiste un'unica estensione $U_n \to F_n$, per ogni $n$, tale che il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} U_{n+1} & \longrightarrow & \langle E, U_n \rangle_h \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{n+1} & \longrightarrow & \langle E, F_n \rangle_h \end{array}$$

sia commutativo.

Se $\mathcal{A}$ è una categoria abeliana, $\mathcal{G}$ la categoria dei gruppi abeliani e $\mathcal{B} = (\mathcal{A}^0, \mathcal{G})_+$ la categoria dei funtori contravarianti additivi da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{G}$, si definisce, per $F, G$ in $(\mathcal{A}, \mathcal{G})_+$, il funtore $\{F, G\}$ in $(\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}, \mathcal{G})_+$ mediante $\{F, G\}(A, C) = (F(A), G(C))$. Si ha allora:

TEOREMA 1. – *Una successione* $\{F^n\}$ *è coomologica rispetto ad* E *se e solo se, per ogni* $n$, *c'è una trasformazione naturale* $E \to \{F^n, F^{n+1}\}$.

Con le ovvie modifiche si ha poi:

TEOREMA 2. – *Una successione* $\{F_n\}$ *è omologica rispetto ad* E *se e solo se, per ogni* $n$, *c'è una trasformazione naturale* $E \to \{F_{n+1}, F_n\}$.

3. Cambiando la varianza dei funtori $E$, $F^n$, $F_n$ si possono considerare diverse nozioni di successioni omologiche e coomologiche alle quali la teoria generale può essere applicata. Al momento attuale la loro interpretazione non è sempre chiara.

Ci sembra perciò opportuno considerare altri esempi. Cominciamo col dare, in questo numero, un esempio di due successioni di funtori, una coomologica e l'altra omologica *rispetto allo stesso funtore*.

Sia X uno spazio topologico. Consideriamo la categoria $\mathcal{F}$ degli A–Moduli (nel senso di Godement) su un fissato fascio di anelli A su X.

$\mathcal{F}$ è una categoria abeliana.

Siano $H^n(X, F)$ i gruppi di coomologia di X a coefficienti nel fascio $F \in \mathcal{F}$ e $H_n(X, F)$ i gruppi di omologia singolare di X a coefficienti nel fascio F definiti in [3]. $H^n(X, -)$ e $H_n(X, -)$ sono funtori covarianti su $\mathcal{F}$.

Consideriamo ora il funtore $\mathrm{Ext}^1$ su $\mathcal{F}^0 \times \mathcal{F}$. Utilizzando i teoremi 1 e 2 si hanno subito le seguenti proposizioni.

PROPOSIZIONE 1. – *La successione* $\{H^n(X, -)\}$ *di funtori su* $\mathcal{F}$ *è una successione coomologica rispetto al funtore* $\mathrm{Ext}^1$. *Tale successione è universale rispetto allo stesso funtore.*

*Dimostrazione.* – L'esistenza delle trasformazioni naturali

$$\mathrm{Ext}^1 \to \{H^n(X, -), H^{n+1}(X, -)\}$$

segue dalla teoria generale della coomologia a coefficienti in un fascio.

Per mostrare che la successione $\{H^n(X, -)\}$ è universale cominciamo con l'osservare che i gruppi abeliani $\mathrm{Ext}^n(E, F)$ sono i valori dei funtori derivati del funtore $F \to \mathrm{Hom}(E, F)$ e che $\mathrm{Hom}(A, F) = \Gamma(X, F)$. Ne segue che, per ogni $n$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$, $H^n(X, F) = \mathrm{Ext}^n(A, F)$. D'altra parte è noto che la successione $\{\mathrm{Ext}^n\}$ è universale rispetto ad $\mathrm{Ext}^1$.

PROPOSIZIONE 2. – *La successione* $\{H_n(X,-)\}$ *di funtori su* $\mathfrak{F}$ *è una successione omologica rispetto al funtore* $\mathrm{Ext}^1$.

*Dimostrazione.* – L'esistenza delle trasformazioni naturali

$$\mathrm{Ext}^1 \to \{H_{n+1}(X,-), H_n(X,-)\}$$

è provata in [3].

È dubbio che la successione $\{H_n(X,-)\}$ sia universale rispetto al funtore $\mathrm{Ext}^1$ senza particolari ipotesi su X.

*Osservazione.* – È ovvio che se consideriamo la restrizione di $\mathrm{Ext}^1$ alla diagonale di $\mathfrak{F}^0 \times \mathfrak{F}$ si ottengono alcuni risultati per i valori dei funtori $H^n$ e $H_n$ a coefficienti in un fissato fascio F (in particolare a coefficienti costanti). Ma come è naturale tali risultati sono banali.

4. Supponiamo ora che il fascio di anelli A sia commutativo. Nella categoria delle successioni esatte corte di $\mathfrak{F}$ consideriamo la famiglia $\mathcal{E}$ delle successioni tali che A sia iniettivo rispetto ad esse. Il fascio A sarà detto *relativamente iniettivo*. $\mathcal{E}$ è la famiglia delle successioni esatte:

$$0 \to E \to G \to F \to 0$$

tali che l'applicazione $\mathrm{Ext}^1(F,A) \to \mathrm{Ext}^1(G,A)$ sia un monomorfismo. Ne segue che, con ogni successione esatta, $\mathcal{E}$ contiene la duale:

$$0 \to F^* \to G^* \to E^* \to 0$$

dove, per ogni $F \in \mathfrak{F}$, $F^* = \mathcal{H}om\,(F,A)$ è il fascio dei germi di omomorfismi di A–Moduli $F \to A$. Siccome A è commutativo $F^* \in \mathfrak{F}$.

Per ogni $n$, $H_n(X,-)$ è un funtore in $(\mathfrak{F}, \mathfrak{M})$ dove $\mathfrak{M}$ è la categoria dei moduli sull'anello $\Gamma = \Gamma(X,A)$ [3].

$H^n(X,F)$ è, in modo naturale, un modulo su $\Gamma$. Quindi, per ogni $n$, anche $H^n(X,-)$ è in $(\mathfrak{F}, \mathfrak{M})$. Per ogni $n$ definiamo il funtore $h^n(X,-)$ da $\mathcal{E}$ a $\mathfrak{M}$ mediante:

$$h^n(X,F) = \mathrm{Hom}_\Gamma(H_n(X,F^*), H^n(X,F)).$$

Si ha banalmente:

PROPOSIZIONE 3. – $h^n(X,F) = 0$ *per* $n \geq 1$ *se* F *è fiacco.*

PROPOSIZIONE 4. – *La successione di funtori* $\{h^n(X,-)\}$ *è una successione coomologica rispetto al funtore* $\mathrm{Ext}^1$ *definito come funtore di estensioni nella classe* $\mathcal{E}$.

*Dimostrazione.* – Siccome la successione $\{H_n(X,-)\}$ è omologica rispetto ad $\mathrm{Ext}^1$ c'è un'applicazione $r : H_{n+1}(X,E^*) \to H_n(X,F^*)$ e siccome la successione $\{H^n(X,-)\}$ è coomologica rispetto ad $\mathrm{Ext}^1$ c'è un'applicazione $s : H^n(X,F) \to H^{n+1}(X,E)$. È facile vedere che si ha quindi un'applicazione:

$$\mathrm{Hom}(r,s) : h^n(X,F) \to h^{n+1}(X,E)$$

e quindi una trasformazione naturale:

$$\mathrm{Ext}^1 \to \{h^n, h^{n+1}\}.$$

*Osservazione*. – La proposizione precedente mostra l'esistenza di una successione:

$$\cdots \to h^n(\mathrm{X}, \mathrm{E}) \to h^n(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \to h^n(\mathrm{X}, \mathrm{F}) \to h^{n+1}(\mathrm{X}, \mathrm{E}) \to \cdots$$

ed è una semplice verifica provare che tale successione è esatta.

È chiaro però che, in generale, i funtori $\mathrm{F} \to \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{F})$ e $\mathrm{F} \to h^0(\mathrm{X}, \mathrm{F}) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{H}_0(\mathrm{X}, \mathrm{F}^*), \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{F}))$ non sono isomorfi. Quindi gli $h^n$ forniscono una teoria di coomologia, a coefficienti in un fascio, che, in generale, non soddisfa l'assioma di « dimensione ».

PROPOSIZIONE 5. – *Se il fascio* A *è fiacco la successione* $\{h^n\}$ è *universale rispetto ad* $\mathrm{Ext}^1$ *su* $\mathcal{E}$.

*Dimostrazione*. – Osserviamo dapprima che se A e B sono relativamente iniettivi $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ è relativamente iniettivo e, per ogni insieme I il fascio $\mathrm{A}^{\mathrm{I}}$ è relativamente iniettivo.

Ogni A–Modulo E si può immergere iniettivamente in $\mathrm{A}^{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{A})} \times \mathrm{Q}$ dove Q è un A–Modulo iniettivo su $\mathcal{F}$.

Se ora A è fiacco i funtori $h^n$ si annullano su $\mathrm{A}^{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{A})} \times \mathrm{Q}$, per $n \geq 1$, come è facile verificare in quanto ogni A–Modulo iniettivo è fiacco.

Siccome per ogni morfismo $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ nella classe $\mathcal{E}$ si ha un diagramma;

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & \mathrm{E} & \to & \mathrm{F} \\ & & \| & & \downarrow \\ 0 & \to & \mathrm{E} & \to & \mathrm{A}^{\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathrm{A})} \times \mathrm{Q} \end{array}$$

ciò prova la proposizione.

*Osservazione*. – La proposizione precedente si applica in particolare al caso in cui il fascio di anelli A è un fascio costante. Per esempio la successione $\{h^n\}$ è universale se $\mathcal{F}$ è la categoria dei fasci di gruppi abeliani.

5. Riprendiamo ora le notazioni del n. 2 per considerare un cambio della varianza del funtore E (o dei funtori $\mathrm{F}^n$, $\mathrm{F}_n$) al quale si è accennato nel n. 3.

Per F, G in $(\mathcal{A}, \mathcal{G})_+$ è stato definito il funtore $\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\}$ in $(\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}, \mathcal{G})_+$ come $\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = (\mathrm{F}(\mathrm{A}), \mathrm{G}(\mathrm{C}))$. Se F, G sono in $(\mathcal{A}^0, \mathcal{G})_+$ il funtore $\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\}$ è in $(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^0, \mathcal{G})_+$.

Per F, G in $(\mathcal{A}, \mathcal{G})_+$ definiamo il funtore $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]$ in $(\mathcal{A} \times \mathcal{A}^0, \mathcal{G})_+$ mediante $[\mathrm{F}, \mathrm{G}](\mathrm{A}, \mathrm{C}) = (\mathrm{F}(\mathrm{C}), \mathrm{G}(\mathrm{A}))$. Se F, G sono in $(\mathcal{A}^0, \mathcal{G})_+$ il funtore $[\mathrm{F}, \mathrm{G}]$ è in $(\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}, \mathcal{G})_+$.

Sia $\mathrm{J} : \mathcal{A} \times \mathcal{A}^0 \to \mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}$ (rispettivamente $\mathrm{J} : \mathcal{A}^0 \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \mathcal{A}^0$) il funtore definito da $\mathrm{J}(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = (\mathrm{C}, \mathrm{A})$. Si ha in ogni caso $[\mathrm{F}, \mathrm{G}] = \{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} \cdot \mathrm{J}$.

Senza spingerci a troppa generalità, ciò che è chiaramente possibile, consideriamo le seguenti definizioni.

*Definizione 5*. – Una successione $\{\mathrm{F}^n\}$ di funtori contravarianti su $\mathcal{A}$ si dice *coomologica covariante* (*contravariante*) *rispetto ad un funtore* E *su* $\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}$ (*su* $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^0$) se per ogni $n$ esiste una trasformazione naturale $\mathrm{E} \to \{\mathrm{F}^n, \mathrm{F}^{n+1}\}$ (rispettivamente $\mathrm{E} \to [\mathrm{F}^n, \mathrm{F}^{n+1}]$).

*Definizione 6.* – Una successione $\{F_n\}$ di funtori covarianti su $\mathcal{A}$ si dice *omologica covariante* (*contravariante*) *rispetto ad un funtore* E su $\mathcal{A} \times \mathcal{A}^0$ (su $\mathcal{A}^0 \times \mathcal{A}$) se per ogni $n$ esiste una trasformazione naturale $E \to \{F_{n+1}, F_n\}$ (rispettivamente $E \to [F_{n+1}, F_n]$).

Tutti gli esempi fin qui considerati sono successioni coomologiche o omologiche covarianti. Diamo ora due esempi di successioni contravarianti. $\mathcal{A}$ sarà la categoria degli spazi topologici con punto base e delle loro applicazioni continue.

PROPOSIZIONE 6. – *La successione* $\{H_n\}$ *dei gruppi di omologia singolare, a coefficienti costanti, di uno spazio è una successione omologica contravariante rispetto al funtore* $E_2(B, F)$. *Tale successione è universale rispetto allo stesso funtore.*

*Dimostrazione.* – Un «mapping cone» $B \xrightarrow{f} X$ può considerarsi, a meno di un'equivalenza omotopica, come una cofibrazione $B \to X \to F$ con $F = X \cup_f CB$. Allora l'applicazione $H_{n+1}(X \cup_f CB) \to H_n(B)$ definisce una trasformazione naturale

$$E_2(B, F) \to [H_{n+1}, H_n](B, F).$$

L'universalità della successione segue dal fatto che la sospensione induce un isomorfismo $H_{n+1}(\Sigma X) \cong H_n(X)$ e da considerazioni di cofinalità analoghe a quelle usate nella dimostrazione della proposizione 5.

In modo del tutto simile si può provare:

PROPOSIZIONE 7. – *La successione* $\{\pi^n\}$ *dei gruppi di coomotopia di uno spazio è una successione coomologica contravariante rispetto al funtore* $E_1(B, F)$. *Tale successione è universale rispetto allo stesso funtore.*

## BIBLIOGRAFIA.

[1] D. BUCHSBAUM, *Homology and universality relative to a functor* (to appear).
[2] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris.
[3] G. SORANI e M. VACCARO, *Omologia a coefficienti in un fibrato*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (1964).