

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

GIANFRANCO PANELLA

**Una classe di fibrazioni di uno spazio proiettivo**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.5, p. 611–615.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1967\\_8\\_42\\_5\\_611\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_611_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Matematica.** — *Una classe di fibrazioni di uno spazio proiettivo.*  
 Nota di GIANFRANCO PANELLA (\*), presentata (\*\*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A characterization is given for fibrations of a projective space over a field, in the case when these fibrations define planes over Hall's V — W systems.

F. Buekenhout [2] <sup>(1)</sup> ha, recentemente, studiato i piani di traslazione che sono coordinatizzati da particolari quasicorpi di André [1]; più precisamente, ha caratterizzato le fibrazioni in rette di uno spazio proiettivo <sup>(2)</sup> relative a piani di André finiti e di caratteristica diversa da due. Quell'autore ha osservato, inoltre, che la sua ricerca riguarda anche particolari piani di traslazione sopra quasicorpi di Marshall Hall e ha posto il problema di caratterizzare graficamente i piani di Hall, senza ipotesi restrittive sulla caratteristica e sull'ordine del loro nucleo.

La presente Nota è dedicata alla soluzione del problema di F. Buekenhout. Si perviene al risultato mediante una caratterizzazione delle fibrazioni in rette di uno spazio proiettivo inerenti a un piano lineare sopra un campo (n. 1) e provando poi, al n. 2, che le fibrazioni ottenibili da queste con la costruzione introdotta in [2] sono tutte e sole quelle associate ai piani di Marshall Hall.

1. Siano  $F$  un campo e  $S_3(F)$  lo spazio proiettivo lineare tridimensionale sopra il campo  $F$ . Una *fibrazione di  $S_3(F)$  in rette* (B. Segre, [5]) è un insieme di rette di  $S_3(F)$  tale che per ciascun punto dello spazio passa una e una sola retta dell'insieme. Se  $K$  è una fibrazione in rette dello  $S_3(F)$  e se si pensa  $S_3(F)$  come spazio improprio dello spazio lineare affine  $A_4(F)$  di dimensione quattro sopra il campo  $F$ , è individuato il *piano di traslazione*  $\pi(K)$  *inerente alla fibrazione*  $K$ ;  $\pi(K)$  ha per *punti* i punti (propri) dello spazio  $A_4(F)$  e ha per *rette* i piani dello  $A_4(F)$  la cui giacitura appartiene a  $K$ . Il piano  $\pi(K)$  si dice associato alla fibrazione  $K$ .

Vogliamo, innanzitutto, caratterizzare i piani di traslazione associati a quelle particolari fibrazioni in rette di uno spazio proiettivo lineare sopra un campo  $F$  che sono individuate con la seguente

DEFINIZIONE 1: *Una fibrazione in rette dello spazio proiettivo  $S_3(F)$ ,  $K$ , è una fibrazione lineare se esistono un campo  $F'$  e un quadrato*

(\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(\*\*) Nella seduta del 13 maggio 1967.

(1) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine.

(2) Una fibrazione in rette di uno spazio proiettivo è, secondo André, una congruenza di rette di quello spazio; per esigenze linguistiche, adottato qui la nomenclatura introdotta in [5].

tico di  $F$  e una retta  $r$  di  $S_3(F')$  tali che, pensato il campo  $F$  immerso in  $F'$  e, in conseguenza,  $S_3(F)$  immerso in  $S_3(F')$ , siano verificate le seguenti condizioni:

1° la retta  $r$  non ha punti in  $S_3(F)$ ,

2° ciascuna retta della fibrazione  $K$ , ampliata allo  $S_3(F')$ , è incidente la retta  $r$ .

Nel seguito, indicheremo una fibrazione lineare con il simbolo  $K(F, F', r)$ ; il significato di tale notazione è chiarito dalla definizione precedente.

Ciò posto, proviamo il

LEMMA I: Siano  $F$  un campo e  $K(F, F', r)$  una fibrazione lineare dello spazio proiettivo  $S_3(F)$ . Il piano di traslazione associato alla fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  è il piano lineare sopra il campo  $F'$ .

Dimostrazione: Il modello del piano  $\pi[K(F, F', r)]$  che ha come sostegno lo spazio affine lineare  $A_4(F)$  è definito a meno di affinità di quello spazio; non è, quindi, restrittivo supporre che tre rette prescelte arbitrariamente in  $K(F, F', r)$  abbiano, rispettivamente, equazioni  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $y_1 = y_2 = 0$ ,  $y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = 0$ , essendo  $(x_1, x_2, y_1, y_2)$  coordinate proiettive in  $S_3(F)$ .  $r$  ha, allora, equazioni  $ky_2 - y_1 = kx_2 - x_1 = 0$ , con  $k$  elemento di  $F' - F$ . Ciascuna retta di  $K(F, F', r)$ , diversa dalla  $x_1 = x_2 = 0$ , incontra il piano  $x_2 = 0$  in uno e in un sol punto di coordinate  $(1, 0, a, b)$   $a, b \in F$ , e ha, quindi, equazioni.

$$(I) \quad \begin{cases} y_1 = ax_1 + f(a, b)x_2 \\ y_2 = bx_1 + g(a, b)x_2 \end{cases}$$

e, al variare della retta in  $K(F, F', r)$ ,  $f$  e  $g$  sono applicazioni di  $F \times F$  in  $F$ , poiché per ogni punto del piano  $x_2 = 0$  passa una retta di  $K(F, F', r)$ . L'incidenza della retta (I) con la retta  $r$  è espressa dalla condizione  $bk^2 + (g(a, b) - a)k - f(a, b) = 0$ ; perciò il polinomio  $bx^2 + (g(a, b) - a)x - f(a, b)$  è annullato, per ogni scelta di  $a$  e  $b$  in  $F$ , dall'elemento  $k$  di  $F' - F$ . Ciò implica, per  $b = 0$ ,  $f(a, 0) = 0$  e  $g(a, 0) = a$ , per ogni elemento  $a$  di  $F$ ; se, invece,  $b \neq 0$  devono esistere due elementi  $c$  e  $d$  di  $F$  tali che risulti  $c = (g(a, b) - a)b^{-1}$  e  $d = f(a, b)b^{-1}$  per ogni scelta di  $a, b$ , con  $b \neq 0$ , in  $F$  e il polinomio  $x^2 + cx - d$  deve essere irriducibile in  $F[x]$ . Ne segue che le applicazioni  $f$  e  $g$  sono definite dalle uguaglianze  $f(a, b) = db$ ,  $g(a, b) = a + cb$ . Un risultato stabilito in [4] (Proposizione II, p. 46) permette, a questo punto, di affermare che se si pone  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$  e  $(a, b)(a', b') = (aa' + f(a, b)b', ba' + g(a, b)b')$ , essendo  $(a, b), (a', b')$  elementi arbitrari di  $F \times F$ , si dota l'insieme  $F \times F$  di una struttura di quasi corpo e che tale quasicorpo  $J$  coordinatizza il piano  $\pi[K(F, F', r)]$ . La particolare struttura delle applicazioni  $f$  e  $g$  comporta che  $J$  è isomorfo al campo  $F(-k)$  e, quindi, al campo  $F'$ . Il lemma I è, così, dimostrato.

Osservazione I: Se il campo  $F'$  è estensione separabile di  $F$ , il lemma I è un semplice corollario di risultati generali stabiliti in [5]. In tal caso, infatti, una fibrazione lineare rientra tra le fibrazioni proiettive che in [5] sono dette sistemi grafici elementari; precisamente, tra quelle indicate, a pag. 58, con  $\Sigma_{2,2}$ . Si verifica, inoltre, immediatamente che il lemma I è invertibile;

ossia, che il piano affine sopra una estensione quadratica di un campo  $F$  è associato a una fibrazione lineare dello spazio proiettivo  $S_3(F)$ . Si osservi, infine, che la condizione  $[F':F] = 2$  non è intervenuta in maniera essenziale nella prova del lemma I; essa è servita solamente per concludere che il campo  $F(-k)$  risulta isomorfo al campo  $F'$ . Si potrebbe, quindi, eliminare quella condizione nella definizione 1 sostituendo, nel seguito, al campo  $F'$  il suo sottocampo  $F(-k)$ .

Considerata, ora, una qualunque fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  dello spazio proiettivo  $S_3(F)$ , proviamo il

LEMMA II: *Esiste una quadrica  $Q$  che verifica la seguente condizione ( $\alpha$ ):  $Q$  è non specializzata, è rigata in  $S_3(F)$  e un suo regolo è costituito da rette della fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ .*

*Dimostrazione:* Il lemma ha carattere proiettivo; possiamo, perciò, supporre che la fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  sia costituita dalle rette (1), con  $f(a, b) = db$  e  $g(a, b) = a + bc$ , e dalla retta  $x_1 = x_2 = 0$ . Le rette (1) definite ponendo  $b = 0$  appartengono alla quadrica  $Q: x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$  e, con la retta  $x_1 = x_2 = 0$ , esauriscono, in  $S_3(F)$ , un regolo di quella quadrica, che risulta non specializzata.

In relazione a quadriche descritte da rette di una fibrazione lineare, sussiste il

LEMMA III: *Sia  $K(F, F', r)$  una fibrazione lineare dello spazio proiettivo  $S_3(F)$  e siano  $Q$  e  $Q'$  due quadriche di quello spazio verificanti, ciascuna, la condizione ( $\alpha$ ) introdotta nell'enunciato del lemma II. Esiste una omografia dello  $S_3(F)$  che fissa la fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  e che trasforma la quadrica  $Q$  nella quadrica  $Q'$ .*

*Dimostrazione:* Poiché anche questo lemma ha carattere proiettivo, possiamo supporre, al solito, che la fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  sia costituita dalle rette (1), con  $f(a, b) = bd$  e  $g(a, b) = a + cb$ , e dalla retta  $x_1 = x_2 = 0$ . Sia  $A_2(F')$  il piano lineare affine sopra il campo  $F'$ . L'identificazione di  $F'$  con  $F(-k)$  ( $k^2 + ck - d = 0$ ), messa in evidenza al termine della dimostrazione del lemma I, ci permette di scrivere ogni punto  $(x, y)$  di  $A_2(F')$  ponendo  $x = x_1 + x_2(-k)$ ,  $y = y_1 + y_2(-k)$  ( $x_1, x_2, y_1, y_2 \in F$ ) e l'identificazione di  $A_2(F')$  con il suo modello definito in  $A_4(F)$  dalla fibrazione lineare  $K(F, F', r)$  si realizza con l'applicazione  $(x, y) \rightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2)$ . In tale applicazione ai punti di una retta di  $A_2(F')$  sono associati tutti e soli i punti di un piano di  $A_4(F)$  la cui giacitura appartiene alla fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ . Il gruppo  $\omega$  delle affinità di  $A_2(F')$  si riflette in un gruppo di affinità di  $A_4(F)$  il quale induce nello spazio improprio  $S_3(F)$  di  $A_4(F)$ , cui appartiene la fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ , un gruppo  $\Omega$  di omografie costituito da tutte e sole le omografie di  $S_3(F)$  che mantengono fissa la fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ . Poiché  $\omega$  è transitivo sulle terne di punti (distinti) della retta impropria di  $A_2(F')$ ,  $\Omega$  risulta transitivo sulle terne di rette (distinte) della fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ . Questa constatazione permette di stabilire immediatamente il lemma, osservando che la quadrica  $Q(Q')$  è individuata da tre sue rette appartenenti a  $K(F, F', r)$ .

2. I lemmi stabiliti al n. 1 ci permettono di affrontare il problema cui questo lavoro è dedicato. Per iniziare la discussione, introdurremo particolari fibrazioni in rette dello spazio proiettivo  $S_3(F)$  lineare tridimensionale sopra un campo  $F$  che, come proveremo, sono tutte e sole le fibrazioni associate a piani di traslazione di Marshall Hall.

Siano, perciò,  $K(F, F', r)$  una fibrazione lineare dello  $S_3(F)$  e  $\sigma(K)$  un insieme di quadriche di quello spazio che verifichi le seguenti condizioni:

*condizione ( $\alpha$ ):* ciascuna quadrica di  $\sigma(K)$  è non specializzata, è rigata in  $S_3(F)$  e un suo regolo è costituito da rette della fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ ;

*condizione ( $\beta$ ):* se  $Q, Q'$  sono due quadriche di  $\sigma(K)$  risulta, in  $S_3(F)$ ,  $Q \cap Q' = \emptyset$ .

Usufruento delle notazioni or ora introdotte, poniamo la seguente

**DEFINIZIONE 2:** Siano  $K(F, F', r)$  una fibrazione lineare di  $S_3(F)$  e  $\sigma(K)$  un insieme di quadriche di quello spazio che, in relazione a  $K(F, F', r)$ , verifichi le condizioni ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ). Una fibrazione semi-lineare di  $S_3(F)$  si ottiene da  $K(F, F', r)$  e da  $\sigma(K)$  sostituendo le rette di  $K(F, F', r)$  che appartengono alle quadriche di  $\sigma(K)$  con le rette degli ulteriori regoli di quelle quadriche. Una fibrazione semi-lineare è di tipo uno se  $\sigma(K)$  contiene una sola quadrica.

Si osservi che il lemma II assicura che è possibile, a partire da una qualunque fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ , costruire una fibrazione semi-lineare di tipo uno.

Possiamo, ormai, provare il

**TEOREMA:** Sia  $H(K, Q)$  una fibrazione semi-lineare di tipo uno dello spazio proiettivo  $S_3(F)$ , e il campo  $F$  abbia ordine diverso da due. Il piano di traslazione  $\pi[H(K, Q)]$  associato alla fibrazione  $H(K, Q)$  è un piano di Marshall Hall (ossia, un piano coordinatizzabile mediante un quasicorpo di Marshall Hall).

*Dimostrazione:* Sia  $K(F, F', r)$  la fibrazione lineare dello spazio proiettivo  $S_3(F)$  che, secondo la definizione 2, permette di ottenere la fibrazione semi-lineare  $H(K, Q)$ , usufruendo della quadrica  $Q$  di  $S_3(F)$ . La definizione del piano  $\pi[H(K, Q)]$  ha carattere proiettivo; possiamo, ancora una volta, supporre che  $K(F, F', r)$  sia costituita dalle rette (I) del n. 1, con  $f(a, b) = db$  e  $g(a, b) = a + cb$ , e dalla retta  $x_1 = x_2 = 0$ . Le rette (I) individuate da  $b = 0$ , con la retta  $x_1 = x_2 = 0$ , costituiscono un regolo della quadrica  $Q'$  di equazione  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$  e appartengono alla fibrazione lineare  $K(F, F', r)$ . In virtù del lemma III, esiste un'omografia dello  $S_3(F)$  che fissa la fibrazione  $K(F, F', r)$  e che trasforma la quadrica  $Q$  nella quadrica  $Q'$ . Trasformata con tale omografia, la fibrazione semi-lineare di tipo uno  $H(K, Q)$  risulta costituita da tutte e sole le rette dello  $S_3(F)$  che hanno equazioni

$$(I) \begin{cases} y_1 = ax_1 + bdx_2 \\ y_2 = bx_1 + (a + cb)x_2 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} x_2 = ax_1 \\ y_2 = ay_1 \end{cases}, \quad (III) \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

essendo  $a, b$  elementi di  $F$  e risultando  $b \neq 0$ .

Si verifica facilmente che l'omografia  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (x_1, y_1, x_2, y_2)$  dello  $S_3(F)$  trasforma le precedenti rette nelle rette

$$(I)' \begin{cases} y_1 = a'x_1 - (a'^2 - cd^{-1}a' - d^{-1})b'^{-1}x_2 \\ y_2 = b'x_1 + (cd^{-1} - a')x_2 \end{cases} \quad (II)' \begin{cases} y_1 = ax_1 \\ y_2 = ax_2 \end{cases} \quad (III)' \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ottenendosi (I)' da (I) con le relazioni  $a' = -ab^{-1}d^{-1}$ ,  $b' = b - (a + bc)ab^{-1}d^{-1}$ , e che l'applicazione  $h: F \times (F - \{0\}) \rightarrow F \times (F - \{0\})$  definita ponendo  $h(a, b) = (a', b')$  è biiettiva. Posto, se  $a, b$  sono elementi arbitrari del campo  $F$ ,  $f'(a, 0) = 0$ ,  $g'(a, 0) = a$ ,  $f'(a, b) = -(a^2 - cd^{-1}a - d^{-1})b^{-1}$  se  $b \neq 0$ ,  $g'(a, b) = cd^{-1} - a$  se  $b = 0$ , le rette

$$(I)' \begin{cases} y_1 = ax_1 + f'(a, b)x_2 \\ y_2 = bx_1 + g'(a, b)x_2 \end{cases}$$

costituiscono, quindi, al variare di  $a, b$  in  $F$ , insieme con la retta  $x_1 = x_2 = 0$ , la fibrazione semi-lineare di tipo uno  $H(K, Q)$ . Poiché risulta  $f'(0, 0) = f'(1, 0) = g'(0, 0) = 0$  e  $g'(1, 0) = 1$  si può affermare, per quanto stabilito in [4] (Proposizione II, p. 46), che ponendo  $(a, b) + (a'', b'') = (a + a'', b + b'')$  e  $(a, b)(a'', b'') = (aa'' + f'(a, b)b'', ba'' + g'(a, b)b'')$  (con  $a, b, a'', b''$  elementi arbitrari del campo  $F$ ) si dota l'insieme  $F \times F$  di una struttura di quasicorpo e che tale quasicorpo coordinatizza il piano di traslazione associato alla fibrazione semi-lineare  $H(K, Q)$ . Quel quasicorpo è, per definizione (cfr. [3], p. 172), il quasicorpo di Marshall Hall costruito a partire dal campo  $F$  e dal polinomio  $x^2 - cd^{-1}x - d^{-1}$ , polinomio che ha i coefficienti in  $F$  ed è irriducibile in  $F[x]$ , per la supposta irriducibilità in  $F[x]$  del polinomio  $x^2 + cx - d$ . Il teorema è, così, completamente dimostrato.

*Osservazione II:* Si verifica facilmente, usufruendo delle argomentazioni svolte in [3], che il teorema precedente è invertibile. Ossia, un piano di traslazione è un piano di Marshall Hall se, e solo se, la congruenza ad esso associata nel senso di André [1] è una fibrazione semi-lineare di tipo uno di uno spazio proiettivo tridimensionale lineare sopra un campo di ordine maggiore di due. Se il campo  $F$  ha ordine due ogni fibrazione semi-lineare di tipo uno dello  $S_3(F)$  è una fibrazione lineare.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. ANDRÉ, *Ueber nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, «Math. Z.», 60, 156-186 (1954).
- [2] F. BUEKENHOUT, *Les plans d'André finis de dimension quatre sur le noyau*, «Bull. Acad. roy. de Belgique» (5), 50 446-457 (1964).
- [3] G. PANELLA, *Isomorfismo tra piani di traslazione di Marshall Hall*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4), 48, 169-180 (1959).
- [4] G. PANELLA, *Una nuova classe di quasicorpi*, «Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. nat.» (8), 28, 44-49 (1960).
- [5] B. SEGRE, *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4), 64, 1-76 (1964).