Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Bressan

Ancora sul teorema di Poynting e sul tensore energetico

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.4, p. 491–496.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_4_491_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Fisica matematica. — *Ancora sul teorema di Poynting e sul tensore energetico.* Nota di ALDO BRESSAN, presentata (*) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — The author proves a uniqueness theorem concerning the electromagnetic energy tensor $E_{\alpha\beta}$, he compares it with another uniqueness theorem by him; moreover he corrects an error in the equalities (14) of his work [2]. This error has no influence on the remainder of the same work.

1. In questa breve Nota dimostro un teorema di unicità che inverte un teorema considerato nella mia precedente Nota [2], e lo confronto con un altro teorema di unicità dimostrato in [4]; inoltre correggo una svista insita nelle posizioni [2 (14)] della pubblicazione [2], la quale non ha ripercussione alcuna sul resto della pubblicazione stessa.

Al suddetto scopo comincio col presupporre, in tutta la presente Nota, la [2] e in particolare il simbolismo ivi usato; inoltre ricordo che mediante le suaccennate posizioni [2 (14)] si introducono due tensori energetici simmetrici ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ ed ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ (del campo elettromagnetico) per i quali si afferma la validità delle relazioni [2 (15)] di carattere energetico:

$$(1) \qquad u^\alpha\, {}_2E^{*}_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = E^\alpha J'_\alpha + k d_2 \lambda/Ds \quad , \; u^\alpha\, {}_3E^{*}_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = E^\alpha J'_\alpha + k d_3 \lambda/Ds \,, \quad \text{ove}$$

$$(2) \qquad d_2\lambda = E_\alpha D_r \pi^\alpha + H_\alpha D_r \mu^\alpha \quad , \; d_3\lambda = E_\alpha D^c \pi^\alpha + H_\alpha D^c \mu^\alpha .$$

A causa di una banale svista in esse si è erroneamente scritto il termine $-2\,E_{(\alpha} B_{\beta)}$ dove si sarebbe dovuto porre l'espressione $-E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta$. Quindi per [2 (8)$_{1,2}$] si può scrivere, in luogo di [2 (14)],

$$(3) \qquad \begin{cases} {}_2E^*_{\alpha\beta} = W\,(u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) + u_{(\alpha} \mathcal{S}_{\beta)} - E_{(\alpha} D_{\beta)} - H_{(\alpha} B_{\beta)} \,, \\ {}_3E^*_{\alpha\beta} = W\,(u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}) + u_{(\alpha} \mathcal{S}_{\beta)} - E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta \,, \end{cases}$$

(ove $\mathcal{S}_\alpha$ è il vettore di Poynting e $2\,W = E_\gamma E^\gamma + H_\gamma H^\gamma$). (1)

Si noti che ${}_2E_{\alpha\beta}$ differisce dalla simmetrizzazione completa del tensore di Abraham solo per l'espressione della densità $\mathfrak{W}$ dell'energia elettromagnetica che per quest'ultimo, anziché W, vale $2^{-1}(E_\gamma D^\gamma + H_\gamma B^\gamma)$; inolre ${}_3E^*_{\alpha\beta}$ dipende solo dai due vettori E_α ed H_α ed ha nei corpi anche polarizzati la stessa espressione competente nel vuoto ad ogni tensore energetico accettabile nel senso defi-

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

(1) Anche in [3] si è erroneamente scritto $-2\,E_{(\alpha} B_{\beta)}$ in luogo di $-E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta$ nelle definizioni [3 (15), (16)] dei tensori ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ e ${}_3E^*_{\alpha\beta}$; così si è fatto pure nella definizione [3 (14)] del tensore ${}_3E_{\alpha\beta}$, molto in uso. La svista considerata non si ripercuote affatto sul resto del detto lavoro [3]. Basta quindi sostituire le suaccennate definizioni con le (3) e, stante [2 (5)], con la seguente:

$${}_3E = \frac{1}{2}(E_\alpha E^\alpha + B_\alpha B^\alpha) \quad , \quad {}_3E'_\alpha = {}_3E''_\alpha = \varepsilon_\alpha{}^{\beta\gamma} E_\beta B_\gamma \quad , \quad {}_3\tilde{E}_{\alpha\beta} = {}_3E\tilde{g}_{\alpha\beta} - E_\alpha E_\beta - B_\alpha B_\beta .$$

nito in ([2] N. 6)(2). Ciò è in completo accordo col punto di vista accennato in [2] secondo cui conviene identificare $\mathcal{W}$ con la densità $W = 2^{-1}(E_\alpha E^\alpha + H_\alpha H^\alpha)$ di *energia elettromagnetica non materiale.*

2. Enuncio ora sostanzialmente l'inverso dell'asserto involgente (1) e fatto in ([2] N. 5), rimandando per la dimostrazione al N. 3.

TEOREMA. *Per* $r = 2, 3$ ${}_rE^*_{\alpha\beta}$ *è l'unico tensore energetico del tipo* $E_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(E_\varrho, H_\varrho, P_\varrho, M_\varrho, g_{\varrho\sigma})$ *accettabile nel senso precisato in* ([2] N. 6) – *cfr. nota* (2) – *e soddisfacente l'*$(r-1)$*-esima delle condizioni* (1) *in corrispondenza a qualunque corpo* $\mathcal{C}$ *e a qualunque processo possibile per* $\mathcal{C}$.

Il precedente asserto di unicità dipende essenzialmente dal tipo $E_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(E_\varrho, \cdots, M_\varrho, g_{\varrho\sigma})$ di tensori energetici a cui si riferisce, in quanto non vale l'analogo di esso per il tipo più generale $E_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}(E_\varrho, E_{\varrho/\sigma}, E_{\varrho/\sigma\tau}, \cdots \cdots, M_\varrho, M_{\varrho/\sigma}, M_{\varrho/\sigma\tau}, g_{\varrho\sigma})$. Infatti, posto, per esempio,

$$E'_{\alpha\beta} = {}_2E^*_{\alpha\beta} + \varepsilon_\alpha{}^{\lambda\mu\gamma}\,\varepsilon_\beta{}^{\varrho\sigma\delta}\,x_{\lambda\mu\varrho\sigma/\gamma\delta} \quad \text{con } x_{\lambda\mu\varrho\sigma} = P_\gamma M^\gamma P_\lambda P_\varrho M_\mu M_\sigma, \tag{4}$$

si ha $E'^{/\beta}_{\alpha\beta} \equiv {}_2E^{*/\beta}_{\alpha\beta}$ – cfr. ([1] N. 8). Quindi $E'_{\alpha\beta} \not\equiv {}_2E^*_{\alpha\beta}$, ciononostante la condizione $(1)_1$ su ${}_2E^*_{\alpha\beta}$ vale anche per $E'_{\alpha\beta}$. Si noti che, in base a (4), per $P_\varrho \equiv M_\varrho \equiv 0$ si ha $E'_{\alpha\beta} = {}_2E^*_{\alpha\beta}$, ossia nel vuoto $E'_{\alpha\beta}$ eguaglia tutti i tensori energetici effettivamente usati (3).

Conviene confrontare il precedente asserto di unicità (in corsivo) con un altro asserto dimostrato in [4]. A tale scopo premetto che, nelle teorie di piezo-elasticità, in generale si usano determinazioni della densità $k\,d\lambda$ del lavoro elementare del campo sui dipoli, le quali individuano fra le variabili elettromagnetiche quelle che, riguardo alle equazioni costitutive, si vogliono considerare come indipendenti e quelle da considerarsi come dipendenti. Per esempio, in [3] si fa $d\lambda = d_2\lambda$ – cfr. $(2)_1$ – e si usano le polarizzazioni specifiche π^α e μ^α come variabili indipendenti e i campi E_α e H_α come variabili dipendenti, in particolare si considerano le equazioni costitutive (4)

$$E_\alpha = \frac{\partial w}{\partial \pi^\alpha} \quad , \quad H_\alpha = \frac{\partial w}{\partial \mu^\alpha}. \tag{5}$$

L'analogo vale nel caso $d\lambda = d_3\lambda$ (5).

(2) A quanto mi consta, ogni tensore energetico $E_{\alpha\beta}$ effettivamente usato è accettabile nel senso definito in ([2] N. 6), ad eccezione di quello di Dällenbach.

(3) Si potrebbe certo costruire una teoria coerente di elasticità con elettro-magnetostrizione a base termodinamica usando un tensore energetico quale $E'_{\alpha\beta}$.

(4) Riguardo a (5) vedi ([3] N. 8) ove risulta pure che w dipende da π^ϱ e μ^ϱ tramite $\pi^\varrho \pi_\varrho$, $\pi^\varrho \mu_\varrho$ e $\mu^\varrho \mu_\varrho$ (ovviamente la variabile termodinamica da cui w va ritenuta dipendere è l'entropia specifica).

(5) Introdotto un riferimento solidale y^L ($L = 1, 2, 3$) e opportuni corrispondenti lagrangiani E^*_L, H^*_L, π^L_*, μ^L_* per i campi E_α e H_α e per le polarizzazioni specifiche π^α e μ^α, risulta $d_3\lambda = E^*_L\, d\pi^L_* + H^*_L\, d\mu^L_*$ – cfr. [4 $(19)_1$] – onde in luogo di (5) si ha $E^*_L = \partial w/\partial \pi^L_*$, $H^*_L = \partial w/\partial \mu^L_*$ – (cfr. [4] N. 6).

Convenzionalmente si può identificare $d\lambda$ per esempio con $d_2\bar{\lambda} = - \pi^\alpha D_r E_\alpha - \mu^\alpha D_r H_\alpha$; allora i ruoli delle considerate variabili dipendenti e indipendenti sono invertiti.

In relatività generale, a mio avviso, conviene assumere un tensore energetico $E_{\alpha\beta}$ a parte mista $E'''_{\alpha\beta} = E'_\alpha u_\beta + u_\alpha E''_\beta$ – cfr. [2 (5)] – simmetrica ($E'''_{[\alpha\beta]} = 0$). Tale tensore $E_{\alpha\beta}$ è largamente arbitrario per polarizzazioni P_α e M_α non entrambe nulle, in quanto sue modifiche che non ne tocchino la parte mista possono essere controbilanciate da opportune modifiche dell'energia interna specifica w e del tensore degli sforzi $X_{\alpha\beta}$.

Per fissare le idee consideriamo per esempio la determinazione $d_2\lambda$ – cfr. $(2)_1$ – di $d\lambda$. Allora, assumere $E_{\alpha\beta} = {}_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta} + \Delta_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta}$ (in modo che sia sempre $\Delta_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta} = 0$) equivale per $(1)_1$ e $(2)_1$ ad identificare con $E^\alpha J'_\alpha + u^\alpha \Delta_2 \overset{*}{E}_{\alpha\beta}$ il contributo $q^{(e)}_{\text{ass}}$ del campo elettromagnetico alla densità di calore assorbito.

Siano $\Delta X_{\alpha\beta}$ e Δw gli incrementi di $X_{\alpha\beta}$ e w corrispondenti a $\Delta_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta}$. Il teorema di unicità dimostrato in ([4] N. 7) in Relatività generale dice che *se un materiale piezo-elastico possiede equazioni costitutive di tipo usuale (e spontaneo) sia per* $q^{(e)}_{\text{ass}}$ *eguale alla densità* $E^\alpha J'_\alpha$ *di calore Joule, sia per* $q^{(e)}_{\text{ass}} = E^\alpha J'_\alpha + u^\alpha \Delta_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta}{}^{/\beta}$, *allora deve esser* $\Delta_2\overset{*}{E}_{\alpha\beta} \equiv 0$.

In altre parole *vi è una sola determinazione della densità* $q^{(e)}_{\text{ass}}$ *del calore assorbito a causa del campo elettromagnetico, per cui le equazioni costitutive di un dato materiale piezo-elastico possono avere la usuale forma spontanea* [6]. A differenza di quanto accade per il considerato lavoro $d\lambda$ del campo elettromagnetico, *la suddetta densità* $q^{(e)}_{\text{ass}}$ *non può esser cambiata neppur convenzionalmente.*

Attualmente la determinazione $E^\alpha J'_\alpha$ di $q^{(e)}_{\text{ass}}$ sembra la più opportuna. Tuttavia, almeno in Relatività, non mi sembra di poter escludere a priori che insorgano motivi per sceglierne qualche altra, magari poco differente dalla suddetta. Infatti, per esempio, l'espressione relativistica del calore assorbito per conduzione termica fornita dal tensore di C. Eckart – cfr. per esempio [3 (24)] – differisce qualitativamente dall'analogo classico (per un termine nell'accelerazione).

Concludendo, in entrambi i teoremi di unicità enunciati al numero precedente e rispettivamente nel presente si afferma l'unicità di un tensore energetico $E_{\alpha\beta}$; ciò si fa, nel primo teorema, sotto l'ipotesi che sia assegnata la parte temporale di $E_{\alpha\beta}{}^{/\beta}$, e nel secondo sotto l'ipotesi che abbiano la usuale forma spontanea le equazioni costitutive dei materiali piezo-elastici connesse con variabili elettromagnetiche indipendenti e dipendenti (arbitrariamente) prefissate.

3. Mi progongo di dimostrare il teorema enunciato al numero 1. A tale scopo comincio col considerare gli usuali tensori elettromagnetici $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$ che caratterizzano rispettivamente le coppie (E_α, B_α) e (H_α, D_α) (venendo

(6) Intendo equazioni quali le (5) o le analoghe cosiderate nella nota (5). Tali equazioni sono esposte in forma completa (precisamente includendo pure quelle esprimenti grandezze meccaniche e termiche) in ([4] N. 6).

inoltre da queste caratterizzati) i quali tensori permettono di scrivere le equazioni di Maxwell nella forma

(6) $$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,F_{\gamma\delta}{}^{/\beta}=0 \quad , \quad f_{\alpha\beta}{}^{/\beta}=J_\alpha \qquad (J_\alpha=J'_\alpha+J''_\alpha),$$

ove J_α, J'_α, e J''_α sono le densità di 4-corrente totale, vera e di polarizzazione rispettivamente.

In coordinate localmente naturali e proprie – cfr. [2 (3)] – la decomposizione [2 (5)] del generico tensore doppio $E_{\alpha\beta}$ si scrive

(7) $$E=E_{00} \quad , \quad E'_r=-E_{r0} \quad , \quad E''_r=-E_{0r} \quad , \quad \tilde{E}_{rs}=E_{rs}\,.$$

Come risulta per esempio da [2′ (82)], nelle suddette coordinate è [7]

(8) $$-E_{0\beta}{}^{/\beta}\equiv\frac{DE}{Ds}+E''^{r}{}_{/r}+(E'^{r}+E''^{r})\,A_r+(\tilde{E}^{rs}+E\tilde{g}^{rs})\,u_{r/s}\,.$$

Il teorema considerato al numero I è un'immediata conseguenza del seguente lemma:

LEMMA. – *Il tensore (non necessariamente simmetrico)* $E_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma}, f_{\varrho\sigma}, g_{\varrho\sigma}, u_\varrho)$ *verifichi le condizioni*

(9) $$\varphi_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma}, F_{\varrho\sigma}, g_{\varrho\sigma}, u_\varrho)=0, \qquad u_\alpha\,E^{\alpha\beta}{}_{/\beta}=0$$

in corrispondenza di ogni corpo $\mathcal{C}$ *e ogni processo possibile per* $\mathcal{C}$. *Allora*

(10) $$E_{\alpha\beta}=\varphi_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma}, f_{\varrho\sigma}, g_{\varrho\sigma}, u_\varrho)\equiv 0\,.$$

Prima di dimostrare il detto lemma, preciso che un qualunque processo possibile per $\mathcal{C}$ può intendersi come rappresentato dalle determinazioni che in esso hanno i campi $F_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ e u_α. Incidentalmente, invece del campo u_α della 4-velocità potrebbero assegnarsi le funzioni $x^\alpha=x^\alpha(t, y^1, y^2, y^3)$ rappresentanti il moto di $\mathcal{C}$).

Viceversa, ogni determinazione di questi campi che verifichi le equazioni di Maxwell, quelle gravitazionali (quindi quelle dinamiche e del bilancio energetico), le equazioni costitutive di $\mathcal{C}$ e la disequazione costituente il 2° prin-

(7) Per comodità del lettore dimostro la (8): per (7), o meglio per [2 (5)], (essendo $A_\alpha=u_{\alpha/\beta}\,u^\beta$, $DE/Ds=E_{/\beta}\,u^\beta$) si ha

(a) $$E_{\alpha\beta}{}^{/\beta}=(Eu_\alpha u_\beta+E'_\alpha u_\beta+u_\alpha E''_\beta+\tilde{E}_{\alpha\beta})^{/\beta}=u_\alpha(DE/Ds+E''^{\beta}{}_{/\beta}+Eu^{\beta}{}_{/\beta})+$$
$$+DE'_\alpha/Ds+E'_\alpha u^{\beta}{}_{/\beta}+\tilde{E}_{\alpha\beta}{}^{/\beta}+EA_\alpha+u_{\alpha/\beta}\,E''^{\beta}\,.$$

Essendo $E'_\alpha u^\alpha=E''_\alpha u^\alpha=u^\alpha\tilde{E}_{\alpha\beta}=\tilde{E}_{\alpha\beta}u^\beta=0$ [cfr. 2 (5)], ne segue

(b) $$-u^\alpha E_{\alpha\beta}{}^{/\beta}=\frac{DE}{Ds}+Eu^{\beta}{}_{/\beta}+E''^{\beta}{}_{/\beta}+E'_\beta A^\beta+\tilde{E}^{\alpha\beta}u_{\alpha/\beta}\,.$$

Essendo $E''^{\beta}{}_{/\tilde{\beta}}=E''^{\beta}{}_{/\gamma}\tilde{g}^{\gamma}{}_{\beta}$ con $\tilde{g}^{\gamma}{}_{\beta}=g^{\gamma}{}_{\beta}+u^\gamma u_\beta$ – cfr. [2 (4)2,3] – e $E''_\beta u^\beta=0$ – cfr. [2 (5)] –, si ha $E''^{\beta}{}_{/\beta}=E''^{\beta}{}_{/\tilde{\beta}}+E''_\beta A^\beta$. Allora la (b), scritta in coordinate localmente naturali e proprie (per cui $u^\alpha=\delta^\alpha{}_0$, $g_{\alpha r}=\delta_{\alpha r}$, $g_{00}=-1$) diviene la (8).

cipio della termodinamica, può intendersi come la rappresentazione di un processo possibile per $\mathcal{C}$.

Riguardo al riferimento ad « ogni corpo $\mathcal{C}$ » fatta nel Lemma, conviene aggiungere che intendo come caratterizzanti un corpo un qualunque sistema di equazioni costitutive atte a dare una (particolare) determinazione di tutte le proprietà meccaniche, elettromagnetiche e termiche considerate nelle usuali teorie dei sistemi continui. Intendo che queste equazioni costitutive soddisfino i requisiti matematici comunemente richiesti per tali equazioni, e in particolare le conseguenze del 2° principio. I suaccennati requisiti variano da autore ad autore. Tuttavia non mi sembra occorra precisarli in quanto mi servirò solo di una loro conseguenza, più avanti esposta, la quale mi sembra accettabile da tutti i suaccennati Autori.

DIMOSTRAZIONE DEL PRECEDENTE LEMMA. – Considero i tensori $F_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta,\gamma}$, $f_{\alpha\beta/\gamma}$, e J_α emisimmetrici rispetto ad α e β. I sistemi dei loro valori che verificano le equazioni di Maxwell $(6)_{1,2}$ costituiscono uno spazio S_{56} a $6+6+24+24+4-8=56$ dimensioni.

Considero pure le equazioni costitutive elettro–magneto–meccaniche di un qualunque corpo piezo–elastico $\mathcal{C}$ (eventualmente anisotropo) in un qualunque suo punto materiale P^*; mi riferisco precisamente, in primo luogo, alle equazioni $\mathcal{E}_1$ che forniscono il legame fra $F_{\alpha\beta}$ e $f_{\alpha\beta}$, che tiene conto delle permeabilità elettrica e magnetica, e, in secondo luogo, alle equazioni $\mathcal{E}_2$ che forniscono la conducibilità elettrica. Indicando con Σ lo stato termico e di deformazione di $\mathcal{C}$, le equazioni $\mathcal{E}_1$, poste in forma tensoriale, e il loro derivato tensoriale possono scriversi

$$(11)\qquad f_{\alpha\beta}=\hat{f}_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma}, \Sigma, x^\varrho) \quad , \quad f_{\alpha\beta/\gamma}=[\hat{f}_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma}, \Sigma, x^\varrho)]_{/\gamma}.$$

Tenendo conto della definizione di densità J''_α di 4–corrente di polarizzazione – ossia $(F_{\alpha\beta}-f_{\alpha\beta})^{/\beta}$ – si riconosce che, nel caso piezo–elastico, le equazioni $\mathcal{E}_2$ possono includersi nella legge di Ohm generalizzata, in modo che risulti un'equazione costitutiva del seguente tipo:

$$(12)\qquad J_\alpha = J'_\alpha + J''_\alpha = \hat{J}_\alpha(F_{\varrho\sigma}, F_{\varrho\sigma/\tau}, \Sigma, x^\varrho).$$

Fissato lo stato Σ di $\mathcal{C}$, la $(11)_2$ induce un legame tra $F_{\varrho\sigma}$, $F_{\varrho\sigma/\tau}$ e $f_{\alpha\beta/\gamma}$; inoltre un tale legame risulta pure eliminando J_α fra $(6)_2$ e (12). Ciononostante, fissati comunque in S_{56} un punto

$$(13)\qquad \bar{P}=(\bar{F}_{\alpha\beta}, \bar{f}_{\alpha\beta}, \bar{F}_{\alpha\beta/\gamma}, \bar{f}_{\alpha\beta/\gamma}, \bar{J}_\alpha)$$

e un suo intorno $\mathfrak{I}_{\bar{P}}$, al variare di $\mathcal{C}$ fra i corpi piezo–elastici le equazioni costitutive stesse (11) e (12) variano; inoltre, penso, ogni autore (qualunque siano i requisiti da lui imposti alle equazioni costitutive) può senz'altro ritenere che ciò avvenga in modo che i punti P in $\mathfrak{I}_{\bar{P}}$ i quali, in corrispondenza di almeno una determinazione di $\mathcal{C}$, verificano le $(11)_{1,2}$ e (12) costituiscono un insieme $\mathfrak{I}'_{\bar{P}}$ ancora di dimensione 56 ($\mathfrak{I}'_{\bar{P}}$, va però ritenuto una parte effettiva di

$\mathfrak{J}_{\bar{P}}$ a causa di certe limitazioni qualitative, esprimibili con diseguaglianze, quali la $J'_\alpha E^\alpha \geq 0$).

Stanti le (6), è ora chiaro che i valori assunti da $f_{\alpha\beta/\gamma}$ quando il punto

$$P' = (\bar{F}_{\alpha\beta}, \bar{f}_{\alpha\beta}, \bar{F}_{\alpha\beta/\gamma}, f_{\alpha\beta/\gamma}, J_\alpha) \tag{14}$$

si muove comunque in $\mathfrak{J}'_{\bar{P}}$ sono ∞^{24}; ossia la dimensione dell'insieme dei possibili valori di $f_{\alpha\beta/\gamma}$ $(= -f_{\beta\alpha/\gamma})$ per cui P′ risolve tutte le equazioni sopra considerate (costitutive e di Maxwell) è la massima a priori possibile.

È questa la suaccennata conseguenza che ritengo possa venire accettata da ogni autore, qualunque siano i requisiti qualitativi da lui imposti alle equazioni costitutive elettro–magneto–meccaniche sopra considerate.

A questo punto si può concludere rapidamente la dimostrazione del lemma enunciato. A tale scopo si faccia dapprima $A_r = u_{r/s} = 0$ (ossia $u_{\alpha/\beta} = 0$). Dall'ipotesi $(9)_2$, in base a (8), ne segue

$$\frac{DE}{Ds} + E''^{r}_{\ /r} \equiv E^{0\beta}_{\ \ /\beta} \equiv \frac{\partial\varphi^{0\beta}}{\partial F_{\varrho\sigma}} F_{\varrho\sigma/\beta} + \frac{\partial\varphi^{0\beta}}{\partial f_{\varrho\sigma}} f_{\varrho\sigma/\beta} = 0. \tag{15}$$

Fatto $F_{\varrho\sigma} = \bar{F}_{\varrho\sigma}$, $f_{\varrho\sigma} = \bar{f}_{\varrho\sigma}$ (e $F_{\varrho\sigma/\beta} = \bar{F}_{\varrho\sigma/\beta}$), per quanto si è poco sopra concluso riguardo ai possibili valori di $f_{\varrho\sigma/\beta}$, la $(15)_3$ deve valere per ∞^{24} valori di $f_{\varrho\sigma/\beta}$; quindi $\partial\varphi^{0\beta}/\partial f_{\varrho\sigma} = 0$, ossia $\varphi^{0\beta}(F_{\varrho\sigma}, f_{\varrho\sigma}, g_{\varrho\sigma}, u_\varrho)$ è indipendente da $f_{\varrho\sigma}$. Allora in base alla $(9)_1$ la (10) vale per $\alpha = 0$.

Stante (7), si può quindi scrivere $E \equiv E''^{r} \equiv 0$. Allora per (8), per $(9)_2$ e per l'arbitrarietà di A_r e $u_{r/s}$, si ha pure $E'^{r} = \tilde{E}^{rs} = 0$. Stante (7) si può quindi concludere che la (10) vale anche per $\alpha \neq 0$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BRESSAN A., *Qualche proprietà di unicità del tensore energetico del campo elettromagnetico*, « Rend. del Circolo matematico di Palermo », serie II – Tomo XIV, p. 147 (1965).

[2] BRESSAN A., *Sul teorema di Poynting e sul tensore energetico*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XLI, fasc. 3–4, p. 175 (1966).

[2′] BRESSAN A., *Sul teorema di Poynting e sul tensore energetico* (versione integrale). In corso di stampa sui « Rend. del circolo matematico di Palermo ».

[3] BRESSAN A., *Sui fluidi capaci di elettro–magneto–strizione dai punti di vista classico e relativistico*, « Annali di Mat. pura ed appl. » (IV), vol. LXXIV, pp. 317–344 (1966).

[4] BRESSAN A., *Elasticità con elettro–magneto–strizione*, « Annali di Mat. pura ed appl. », (IV), vol. LXXIV, pp. 383–398 (1966).