
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENZO TONTI

Principi variazionali nell'elastostatica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.3, p. 390–394.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_390_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Principi variazionali nell'elastostatica* (*).
Nota di ENZO TONTI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — Three new variational principles of increasing generality are presented for elastostatics; they add to the four existing principles and are valid for small displacement theory and also for non-linear stress-strain relations.

1. INTRODUZIONE. — Consideriamo un corpo elastico occupante un volume V racchiuso entro una superficie S e soggetto a piccole deformazioni. Sia p^{hk} il tensore degli sforzi, e_{hk} quello delle deformazioni e si consideri un legame sforzi-deformazioni genericamente non lineare. Supposto che le espressioni differenziali $p^{hk} de_{hk}$ e $e_{hk} dp^{hk}$ (1) siano entrambe esatte allora esistono rispettivamente una densità di energia di deformazione $W(e)$ ed una densità di energia complementare $F(p)$ che coincide, a meno del segno, con il potenziale termodinamico di Gibbs [1]. Cioè:

$$W(e) = \int p^{hk}(e) de_{hk} \quad F(p) = \int e_{hk}(p) dp^{hk}$$

quindi:

$$(1 a), (1 b) \quad p^{hk} = \frac{\partial W(e)}{\partial e_{hk}} \quad e_{hk} = \frac{\partial F(p)}{\partial p^{hk}}.$$

La superficie del corpo è divisibile in due parti: sull'una che indicheremo con S_f sono assegnate le forze per unità di superficie f^h e sull'altra che indicheremo con S_u sono assegnati gli spostamenti $\bar{u}^h$.

Indicate con F^h le forze per unità di volume, le equazioni di equilibrio sono:

$$(2 a), (2 b) \quad p^{hk}{}_{|k} + F^h = 0 \quad p^{hk} n_k = f^h \quad \text{su } S_f$$

essendo n_k la normale alla superficie orientata verso l'esterno del corpo.

Le equazioni di congruenza sono:

$$(3 a), (3 b) \quad \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} e_{rs|lm} = 0 \quad u^h = \bar{u}^h \quad \text{su } S_u.$$

Supponiamo che tanto le forze per unità di volume quanto quelle per unità di superficie siano conservative e siano $\bar{\mathcal{V}}$ e $\bar{v}$ le rispettive energie potenziali. Posto $\mathcal{V}(u) = \bar{\mathcal{V}}|^h u_h$ e $v(u) = \bar{v}|^h u_h$ sarà:

$$(4) \quad F^h = - \frac{\partial \mathcal{V}(u)}{\partial u_h} \quad f^h = - \frac{\partial v(u)}{\partial u_h}.$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca N. 34 del C.N.R. Istituto Matematico del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

(1) Qui e in seguito è sottinteso il segno di sommatoria per gli indici che si saturano, indici che assumono i valori 1, 2, 3.

Le equazioni indefinite di equilibrio (2 a) e quelle indefinite di congruenza (3 a) nell'ipotesi di piccoli spostamenti hanno rispettivamente come integrale generale:

$$(5), (6) \quad \begin{cases} p^{hk} = \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \chi_{rs|lm} + \overline{\mathfrak{A}} g^{hk} \\ e_{hk} = \frac{1}{2} (u_{h|k} + u_{k|h}) \end{cases}$$

in cui g^{hk} è il tensore fondamentale. La (5) è la soluzione di B. Finzi [2] in essa compare il tensore doppio simmetrico χ_{rs} di cui tre componenti possono scegliersi ad arbitrio.

Come è noto le soluzioni delle equazioni dell'elasticità (2), (3), (5), (6) godono della proprietà di rendere stazionari alcuni funzionali di cui diamo una breve rassegna.

Il principio della minima energia potenziale totale afferma la stazionarietà del funzionale:

$$(7) \quad J_1[u] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V \{ W[e(u)] + \mathfrak{A}(u) \} dV + \iint_{S_f} v(u) dS$$

rispetto ad arbitrarie variazioni di u^h , nulle su S_u se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio indefinite (2 a) e al contorno (2 b).

Reissner [3] nel 1950 ha ampliato il principio precedente costruendo il funzionale:

$$(8) \quad J_2[u, p] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V [p^{hk} e_{hk}(u) - F(p) + \mathfrak{A}(u)] dV + \iint_{S_f} v(u) dS$$

la cui stazionarietà rispetto ad una variazione delle u^h nulla su S_u fornisce le equazioni di equilibrio indefinite (2 a) e al contorno (2 b); mentre la stazionarietà rispetto ad una variazione delle p^{hk} fornisce il legame sforzi-deformazioni (1 b). La funzione $e_{hk}(u)$ si intende data dalla (6).

Nel 1955 H.C. Hu [4] e K. Washizu [5] hanno generalizzato il principio di Reissner costruendo il funzionale:

$$(9) \quad J_3[u, p, e] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V \left\{ W(e) - p^{hk} \left[e_{hk} - \frac{1}{2} (u_{h|k} + u_{k|h}) \right] + \mathfrak{A}(u) \right\} dV + \\ + \iint_{S_f} v(u) dS - \iint_{S_u} p^{hk} n_k (u_h - \bar{u}_h) dS$$

la cui stazionarietà rispetto ad arbitrarie variazioni di u^h fornisce le equazioni di equilibrio indefinite (2 a) e al contorno (2 b); la stazionarietà rispetto alle p^{hk} fornisce l'integrale generale delle equazioni di congruenza (6) e la condizione al contorno (3 b); ed infine la stazionarietà rispetto alle e_{hk} fornisce il legame sforzi-deformazioni (1 a). Le dimostrazioni di questi tre principi si possono trovare in [1].

Per i principi che seguono facciamo l'ipotesi che le forze di superficie siano assegnate su tutto il contorno, quindi che sia $S_f \equiv S$ e $S_u \equiv 0$. Ciò posto il principio di Finzi [6] che estende quello di Menabrea al caso di legame sforzi-deformazioni non lineare e che è il duale della minima energia potenziale totale, asserisce che il funzionale:

$$(10) \quad J_4[\chi] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V F[p(\chi)] dV$$

è stazionario rispetto ad arbitrarie variazioni del potenziale degli sforzi χ_{rs} nulle sul contorno S insieme alle derivate prime ⁽²⁾ se sono soddisfatte le equazioni indefinite di congruenza (3 a).

Questo principio può essere ampliato in due stadi successivi ottenendo due nuovi principi; inoltre si può enunciare un terzo principio più generale dei precedenti dal quale tutte le equazioni dell'elasticità possono essere dedotte.

2. IL PRIMO PRINCIPIO. - Il ruolo giocato da u^h , potenziale delle deformazioni, e p^{hk} nel principio di Reissner suggerisce la possibilità di un principio variazionale costruito con χ_{rs} , potenziale degli sforzi, ed e_{hk} . Questo principio è di fatto possibile ed asserisce che il funzionale:

$$(11) \quad J_5[\chi, e] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V [p^{hk}(\chi) e_{hk} - W(e)] dV$$

è stazionario rispetto ad una variazione delle χ_{rs} nulla con le sue derivate prime sul contorno S se sono soddisfatte le equazioni di congruenza indefinite (3 a); è stazionario rispetto alle e_{hk} se è soddisfatto il legame sforzi-deformazioni (1 a).

Dimostrazione. Si ha:

$$\delta_\chi J_5 = \iiint_V e_{hk} \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \delta \chi_{rs|lm} dV = 0.$$

Eseguendo una doppia integrazione per parti, ricordando che $\delta \chi_{rs}$ e $\delta \chi_{rs|l}$ sono nulle su S e arbitrarie entro V otteniamo le equazioni indefinite di congruenza (3 a). D'altro canto:

$$\delta_e J_5 = \iiint_V \left[p^{hk} - \frac{\partial W(e)}{\partial e_{hk}} \right] \delta e_{hk} dV = 0$$

donde, per l'arbitrarietà di δe_{hk} entro V segue il legame sforzi-deformazioni. Questo principio costituisce la forma hamiltoniana di quello di Finzi.

(2) Si osservi che nel funzionale $J_4[\chi]$ compaiono le derivate seconde di χ_{rs} (si tenga presente la (5)): questo comporta che sul contorno si debbano assegnare indipendentemente tanto le funzioni χ_{rs} quanto le loro derivate prime $\chi_{rs|l}$ e quindi che le variazioni siano indipendenti.

3. IL SECONDO PRINCIPIO. — Il principio precedente, duale di quello di Reissner può essere esteso ottenendo il principio duale di quello di Hu-Washizu. Precisamente, il funzionale;

$$(12) \quad J_6[\chi, e, p] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V \{ F(p) - e_{hk} [p^{hk} - \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \chi_{rs|lm} - \overline{\mathfrak{A}} g^{hk}] \} dV$$

è stazionario rispetto ad una variazione del potenziale χ_{rs} nulla su S se sono soddisfatte le equazioni di congruenza indefinite (3 a); è stazionario rispetto ad una variazione di e_{hk} se è soddisfatto l'integrale generale (5) delle equazioni di equilibrio e le condizioni al contorno (2 b); infine è stazionario rispetto ad una variazione delle p^{hk} se è soddisfatto il legame sforzi-deformazioni (1 b).

Dimostrazione. Ricordando che $\delta\chi_{rs} = 0$ e $\delta\chi_{rs|sl} = 0$ su S si ha:

$$\delta_\chi J_6 = \iiint_V [e_{hk} \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \delta\chi_{rs|lm}] dV = 0$$

integrando due volte per parti, per l'arbitrarietà di $\delta\chi_{rs}$ entro V si ottengono le equazioni indefinite di congruenza (3 a). Inoltre:

$$\delta_e J_6 = \iiint_V - [p^{hk} - \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \chi_{rs|lm} - \overline{\mathfrak{A}} g^{hk}] \delta e_{hk} dV = 0$$

che per l'arbitrarietà di δe_{hk} entro V fornisce l'integrale generale (5) delle equazioni di equilibrio. Infine:

$$\delta_p J_6 = \iiint_V \left[\frac{\partial F(p)}{\partial p^{hk}} - e_{hk} \right] \delta p^{hk} = 0$$

che per l'arbitrarietà di δp^{hk} entro V fornisce il legame sforzi-deformazioni (1 b).

4. IL TERZO PRINCIPIO. — È possibile formulare un principio più generale da cui si ottengono in modo simmetrico tanto le equazioni di equilibrio quanto quelle di congruenza oltre al legame sforzi-deformazioni. Esso afferma che il funzionale:

$$J_7[u, \chi, p, e] \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V \left\{ p^{hk} \frac{u_{h|k} + u_{k|h}}{2} - F(p) - W(e) + \overline{\mathfrak{A}}(u) + \right. \\ \left. + e_{hk} [\varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \chi_{rs|lm} + \overline{\mathfrak{A}} g^{hk}] \right\} dV + \iint_{S_f} v(u) dS$$

è stazionario rispetto ad una variazione del potenziale u_h se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio indefinite (2 a) e al contorno (2 b); è stazionario rispetto ad una variazione del potenziale χ_{rs} nulla su S insieme con le sue derivate prime se sono soddisfatte le equazioni di congruenza indefinite (3 a); è stazionario rispetto ad una variazione delle deformazioni e_{hk} se è soddisfatto

il legame sforzi-deformazioni (1 b); ed infine è stazionario rispetto ad una variazione degli sforzi p^{hk} se è soddisfatto il legame sforzi-deformazioni (1a).

Dimostrazione:

$$\delta_u J_7 = \iiint_V -[p^{hk}|_k - \bar{\mathfrak{V}}^{/h}] \delta u_h dV + \iint_{S_f} (p^{hk} n_k - \bar{v}^{/h}) \delta u_h dS = 0$$

donde seguono le equazioni di equilibrio. Inoltre:

$$\delta_\chi J_7 = \iiint_V e_{hk} \varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \delta \chi_{rs|lm} dV = 0$$

donde integrando per parti, ricordando che $\delta \chi_{rs}$ e $\delta \chi_{rs|l}$ sono nulli su S e le $\delta \chi_{rs}$ sono arbitrarie entro V si ottengono le equazioni di congruenza. Ancora:

$$\delta_e J_7 = \iiint_V \left[\varepsilon^{hrl} \varepsilon^{ksm} \chi_{rs|lm} + \bar{\mathfrak{V}} g^{hk} - \frac{\partial W(e)}{\partial e_{hk}} \right] \delta e_{hk} dV = 0$$

che per l'arbitrarietà di δe_{hk} entro V fornisce il legame sforzi-deformazioni (1 a). Infine:

$$\delta_p J_7 = \iiint_V \left[\frac{u_{h|k} + u_{k|h}}{2} - \frac{\partial F(p)}{\partial p^{hk}} \right] \delta p^{hk} dV = 0$$

donde per l'arbitrarietà di δp^{hk} entro V segue il legame sforzi-deformazioni (1 b).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] FUNG, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall 1965.
- [2] B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della Meccanica dei sistemi continui*, « Rend. Lincei », ser. VI, 19 (1934).
- [3] REISSNER, *On a Variational Theorem in Elasticity*, « J. Math. and Phys. », 29, 90-95 (1950).
- [4] HAI-CHANG HU, *On some Variational Principles in the Theory of Elasticity and Plasticity*, « Scientia Sinica », 4, 33-55 (1955).
- [5] K. WASHIZU, *On the variational Principles of Elasticity and Plasticity*, Technical Report. 25-18 M.I.T. 1955.
- [6] B. FINZI, *Principio variazionale nella Meccanica dei continui*, « Accademia d'Italia », 9, VII, 412 (1940).