
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GAETANO CARICATO

**Sulle piccole oscillazioni di corde e travi elastiche.
Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.3, p. 373–380.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_373_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulle piccole oscillazioni di corde e travi elastiche.*

Nota I di GAETANO CARICATO, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — Riemann's method is applied to a study of the vibrations of strings and rods, free at one end, and with the prescribed motion at the other. A simple law for obtaining the solution elementarily is demonstrated, provided Riemann's function of the equation of the vibrations is known.

1. Com'è noto, nell'ambito delle piccole oscillazioni, le vibrazioni trasversali di una corda e quelle torsionali di una trave, nonché le vibrazioni longitudinali per entrambi i sistemi, anche in presenza di un debole effetto dissipativo, sono rette da una stessa equazione alle derivate parziali, del 2° ordine, iperbolica (1), che si può scrivere nella forma

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

con $S = S(x)$ sforzo di tensione nella fune, $S = EA$ o $G\Theta$ rispettivamente *estenso-* o *torsio-rigidezza* nella trave, $\mu = \mu(x)$ infine è ovviamente la massa per unità di lunghezza nella fune e nella trave o momento polare di inerzia rispetto al centro del taglio nelle vibrazioni torsionali.

Nelle svariate applicazioni in cui intervengono i fenomeni vibratorii suddetti, si pensi ad esempio alle vibrazioni di una torre o di un edificio per effetto di un moto sismico sussultorio (2), le condizioni che vengono per lo più imposte agli estremi consistono essenzialmente nell'assegnare ad un estremo la legge del moto e nel supporre l'altro estremo in una delle condizioni seguenti:

a) libero; b) soggetto ad una tensione nota; c) con un carico inerte ad esso attaccato; d) soggetto ad un vincolo elastico.

In tutti questi casi sarebbe molto utile poter disporre di soluzioni *esplicite* elementari espresse *direttamente* mediante i dati, in modo analogo a quanto avviene nella soluzione classica del d'Alembert per una corda omogenea. Si eviterebbe così sia lo studio di sviluppi in serie di vibrazioni proprie (3), sia l'uso di formule ricorrenti che nel caso omogeneo si ottengono assoggettando la soluzione generale di d'Alembert a soddisfare le condizioni richieste agli estremi (4). Con tale intento si prende in esame nella presente Nota il caso in cui corda o trave abbiano un estremo con moto prescritto, la prima moto trasver-

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

(1) Cfr. G. KRALL, *Meccanica Tecnica delle vibrazioni*, Zanichelli, Bologna 1940, Parte seconda, pp. 37, 228, 318.

(2) U. PUPPINI, *Contributo allo studio delle azioni sismiche sugli edifici*, « Il Monitore Tecnico », pp. 40-43, 54-58, 70-73, 88-92 (1916).

(3) BÉLA SZ.-NAGY, *Vibrations d'une corde non homogène*, « Bull. Soc. Math. France », 75, 193-208 (1947).

(4) Cfr. U. PUPPINI, lavoro cit. in (2), p. 88.

sale, la seconda moto sussultorio o rotazionale, e l'altro estremo libero. Utilizzando il metodo di Riemann, dopo aver eseguito un opportuno prolungamento dei dati, si riesce a precisare una legge semplice di composizione della soluzione mediante i dati la quale, quando i moduli $S(x)$ e $\mu(x)$ dei sistemi elastici sono funzioni generiche dell'ascissa x , è naturalmente subordinata alla conoscenza esplicita della funzione di Riemann ⁽⁵⁾ dell'equazione (1).

2. ENUNCIAZIONE DEL PROBLEMA. FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE (1) ED EQUAZIONE AGGIUNTA. - Data in un piano cartesiano Axt la semistriscia Σ

$$(2) \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0$$

ove l rappresenta la lunghezza del solido elastico, siano assegnate nell'intervallo $(0, l)$ dell'asse x due funzioni limitate e continue $u_0(x)$, $\dot{u}_0(x)$, e nell'intervallo $(0, \infty)$ dell'asse t una funzione limitata e continua $\zeta(t)$ che si annulli per $t = 0$. Ciò posto, si vuol determinare nella semistriscia (2) una soluzione $u(x, t)$ dell'equazione (1) che soddisfi le condizioni iniziali

$$(3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{u}_0(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

e le condizioni agli estremi

$$(4) \quad u(0, t) = \zeta(t), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

A tale scopo, scritta la (1) nella forma

$$(1)' \quad f(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

con

$$f(x) \equiv \frac{S(x)}{\mu(x)}, \quad h(x) \equiv \frac{1}{\mu} \frac{dS}{dx} \quad [f(x) > 0 \text{ per } 0 \leq x \leq l],$$

si considerino le due famiglie di curve caratteristiche della (1)', di equazioni

$$(5) \quad t \pm p(x) = \text{cost.}, \quad \left[p(x) \equiv \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{f(x)}} \right],$$

e si esegua la trasformazione di coordinate

$$(6) \quad \xi(x, t) = \frac{1}{2}(t - p(x)), \quad \eta(x, t) = \frac{1}{2}(t + p(x))$$

la cui trasformazione inversa può scriversi

$$(7) \quad x = q(\eta - \xi), \quad t = \xi + \eta.$$

(5) Cfr. F. G. TRICOMI, *Equazioni a derivate parziali*, Cremonese, Roma 1957, p. 129.

Alla semistriscia (2) verrà a corrispondere, per il tramite della (6), la semistriscia $\tilde{\Sigma}$ del piano cartesiano (A, ξ, η) che ha per base il segmento, appartenente alla retta $\xi + \eta = 0$, di estremi (cfr. figura)

$$(8) \quad A \equiv (0, 0) \quad , \quad \tilde{B} \equiv \left[-\frac{1}{2} p(l), \frac{1}{2} p(l) \right]$$

e per lati rispettivamente le semirette

$$(9) \quad \eta = \xi \quad , \quad \xi + \eta \geq 0$$

$$(10) \quad \eta = \xi + p(l) \quad , \quad \xi + \eta \geq 0.$$

Si osservi poi che se si pone

$$(11) \quad w(\xi, \eta) \equiv u(x, t) \quad , \quad m(\eta - \xi) \equiv \bar{m}(x) \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{S}{\mu}} ,$$

la (1)' assume la forma canonica

$$(1)'' \quad L(w) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} - m(\eta - \xi) \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) = 0 ,$$

e all'equazione aggiunta della (1)'', avendosi

$$\frac{\partial m}{\partial \xi} = -\frac{\partial m}{\partial \eta} \equiv -\frac{1}{2} \sqrt{f} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (\sqrt{f}) \equiv -\sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{d\bar{m}}{dx} ,$$

può darsi la forma

$$(12) \quad M(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} + m \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + 2 \frac{\partial m}{\partial \xi} v = 0 .$$

Per un'equazione del tipo (12), le linee caratteristiche nel piano (A, ξ, η) sono i due fasci di rette di rispettive equazioni $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$

Il metodo di Riemann sarà direttamente applicato allo studio dell'equazione (1)'': per poter fare ciò, com'è noto, occorre cercare una soluzione del problema di Goursat per l'equazione aggiunta (12), ossia un integrale della (12) che sulle rette caratteristiche $\xi = \text{cost.}$, $\eta = \text{cost.}$ soddisfi le condizioni ⁽⁶⁾

$$(13) \quad v = e^{\int_{\bar{\eta}}^{\bar{\xi}} m(\bar{\eta} - \bar{\xi}) d\bar{\xi}} \quad \text{per } \eta = \bar{\eta} \quad , \quad v = e^{-\int_{\bar{\eta}}^{\eta} m(\eta - \bar{\xi}) d\eta} \quad \text{per } \xi = \bar{\xi} .$$

Supposta nota una siffatta soluzione, per poter utilizzare in tutto il semipiano $\xi + \eta \geq 0$ l'identità sulla quale si fonda il metodo di Riemann per l'integrazione della (1)'', basterà un opportuno prolungamento a tutto il semipiano $\xi + \eta \geq 0$ dei dati del problema, definiti nella semistriscia $\tilde{\Sigma}$. Quando si ponga

$$2 D_n(w) \equiv \frac{\partial w}{\partial \eta} \cos \widehat{n\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \cos \widehat{n\eta} \quad , \quad P_n(\xi, \eta) \equiv m(\eta - \xi) (\cos \widehat{n\xi} - \cos \widehat{n\eta}) ,$$

(6) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, tome III, Gauthier Villars Paris 1942, § 495; F. TRICOMI, Trattato cit. in ⁽⁵⁾, § 2.5.

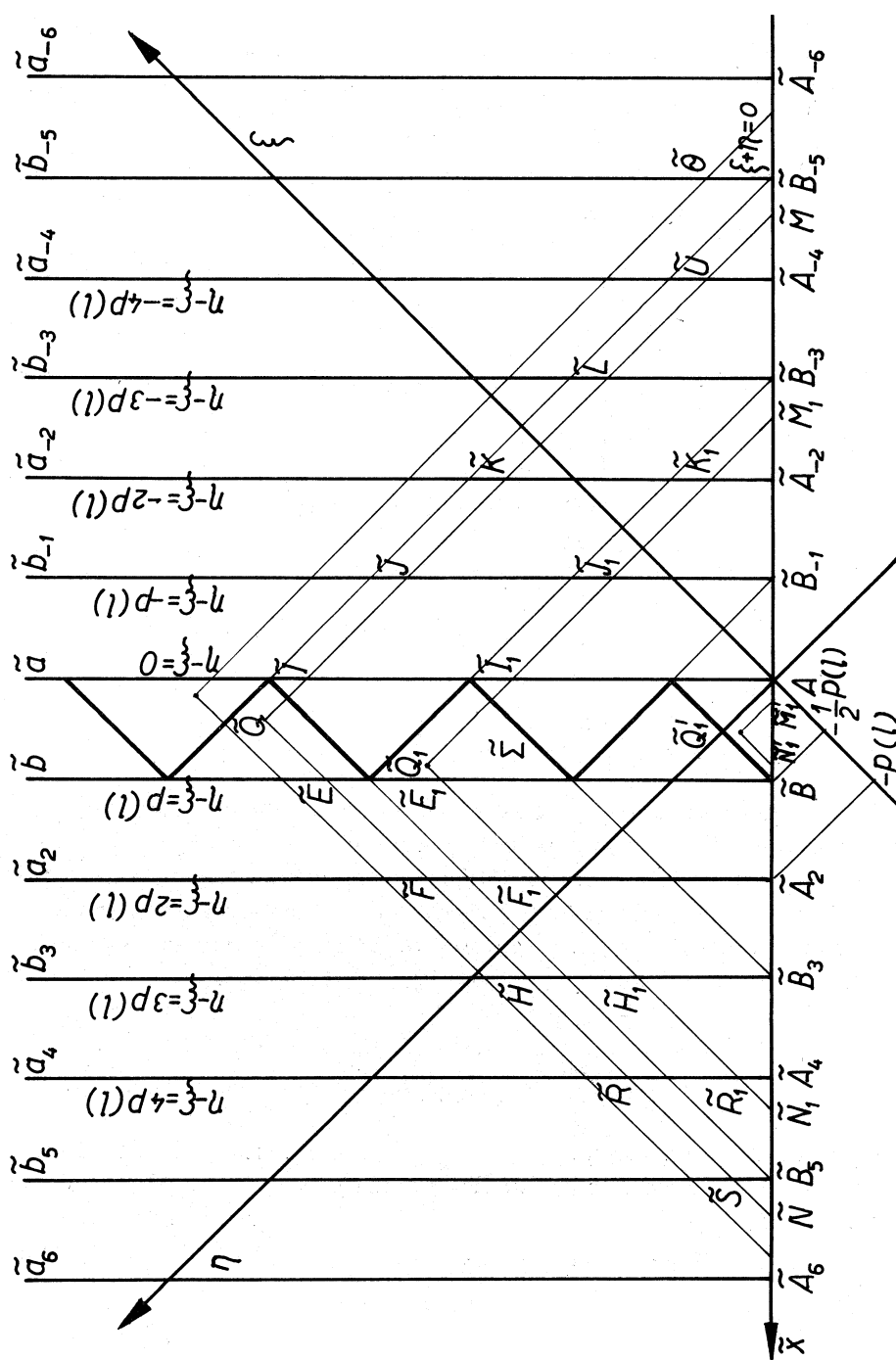


Fig. 1.

e si indichi con R un dominio regolare del piano (A, ξ, η) , FR la sua frontiera, n la normale a FR orientata verso l'interno di R , e ds il valore assoluto dell'elemento d'arco di FR , l'identità in oggetto ha l'espressione seguente:

$$(I4) \quad \int_R [vL(w) - wM(v)] dR = \int_{FR} [wD_n(v) - vD_n(w) + vwP_n] ds.$$

3. PROLUNGAMENTO DEI DATI. — Volendo determinare, per il tramite della identità (I4), la soluzione del problema senza limitazioni per la variabile temporale occorre ampliare, come già s'è detto, il campo di definizione dei dati.

Siano prolungati all'intero asse x : I dati di Cauchy $u_0(x), \dot{u}_0(x)$ in modo da ottenere due funzioni dispari ⁽⁷⁾ e periodiche con periodo $2l$; le funzioni $S(x), \mu(x)$ [con senso fisico nel solo intervallo $(0, l)$ e con derivate prime e seconde limitate e continue] in modo che il loro rapporto $f(x) = \frac{S(x)}{\mu(x)}$ risulti una funzione pari e periodica di periodo $2l$. Le derivate prima e seconda di $f(x)$ siano però continue ovunque. Si esegua infine il prolungamento con legge dispari (rispetto alla variabile x) e periodo $2l$ della funzione $u(x, t)$, imponendo alla derivata $\partial u / \partial x$ che sulle rette $x = \pm(2n+1)l$ verifichi la condizione

$$(I5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=kl} = 0 \quad k = \pm(2n+1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Avendosi

$$(I6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \left(-\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right),$$

i prolungamenti ora indicati indurranno, in virtù delle (6), prolungamenti analoghi per le funzioni $w(\xi, \eta), \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{1}{\sqrt{f}} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)$: le prime due risulteranno dispari e periodiche su ciascuna delle rette $\xi + \eta = \text{cost.}$; l'ultima soddisferà la condizione

$$(I5)' \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{sulle rette } \eta - \xi = \pm(2n+1)p(l) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Premesso ciò, l'identità (I4) potrà essere applicata in un qualunque dominio R regolare del semipiano $\xi + \eta \geq 0$. Quando si scelgano le funzioni $w(\xi, \eta)$ e $v(\xi, \eta)$ fra le rispettive soluzioni delle equazioni (I)'' e (I2), la (I4) diventa

$$(I7) \quad \int_{FR} \Phi ds \equiv \int_{FR} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \cos \widehat{n\xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \cos \widehat{n\eta} \right) w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \cos \widehat{n\xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \cos \widehat{n\eta} \right) v + \right. \\ \left. + vwm (\cos \widehat{n\xi} - \cos \widehat{n\eta}) \right] ds = 0.$$

(7) Cfr. op. cit., in (1), Parte seconda p. 225.

Prima di passare ad utilizzare la (17) per il calcolo delle soluzioni della (1)'', si può osservare che se una funzione $v(\xi, \eta | \xi^*, \eta^*)$ rappresenta la funzione di Riemann della (1)'', vale a dire la soluzione dell'equazione (12) che in un punto $\tilde{Q}^* \equiv (\xi^*, \eta^*)$ di $\tilde{\Sigma}$ assume il valore 1 e sulle caratteristiche per $\tilde{Q}^*$, $\tilde{Q}^* \tilde{M}$, $\tilde{Q}^* \tilde{N}$ soddisfa le rispettive condizioni [cfr. (13)]

$$(18) \quad v_\eta \equiv \frac{\partial v}{\partial \eta} + mv = 0 \quad \text{su } \tilde{Q}^* \tilde{M}, \quad v_\xi \equiv \frac{\partial v}{\partial \xi} - mv = 0 \quad \text{su } \tilde{Q}^* \tilde{N},$$

posto $\tilde{\beta} \equiv -\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$, $\tilde{\psi} \equiv \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} + 4mv$, sussistono le formule seguenti: sulle due caratteristiche per $\tilde{Q}^*$

$$(19) \quad \int_{\tilde{Q}^*}^{\tilde{I}} \Phi ds = \frac{1}{2} [w_{\tilde{Q}^*} - (vw)_{\tilde{I}^-}] \quad , \quad \int_{\tilde{I}^+}^{\tilde{J}^-} \Phi ds = \frac{1}{2} [(vw)_{\tilde{I}^+} - (vw)_{\tilde{J}^-}] \quad , \quad \text{ecc.},$$

$$(20) \quad \int_{\tilde{E}^+}^{\tilde{Q}^*} \Phi ds = \frac{1}{2} [w_{\tilde{Q}^*} - (vw)_{\tilde{E}^+}] \quad , \quad \int_{\tilde{F}^+}^{\tilde{E}^-} \Phi ds = \frac{1}{2} [(vw)_{\tilde{E}^-} - (vw)_{\tilde{F}^+}] \quad , \quad \text{ecc.};$$

sulle rette $\eta - \xi = \text{cost.}$, a seconda che siano percorse nel verso crescente o decrescente di η ,

$$(21) \quad \int \Phi ds = \frac{1}{2} \int w^+ \tilde{\psi} d\eta - \frac{1}{2} \int v \tilde{\beta} d\eta \quad (\eta \text{ cresc.}),$$

$$\int \Phi ds = \frac{1}{2} \int w^- \tilde{\psi} d\eta - \frac{1}{2} \int v \tilde{\beta} d\eta \quad (\eta \text{ decresc.}).$$

Le funzioni munite del segno + sono da valutare sul bordo delle rette $\tilde{a}_r$ o $\tilde{b}_r$ che l'osservatore vede a destra in figura, e analogo significato si attribuisce al segno -.

4. LEGGE DI COMPOSIZIONE DELL'ESPRESSIONE DELLA SOLUZIONE AL GENERICO ISTANTE. - Sia $\tilde{Q}_1 \equiv (\xi_1, \eta_1)$ un punto di $\tilde{\Sigma}$ tale che gli archi di caratteristiche $\tilde{Q}_1 \tilde{M}_1$, $\tilde{Q}_1 \tilde{N}_1$ ($\tilde{M}_1, \tilde{N}_1$ essendo punti dell'asse $\tilde{x}$) intersechino le rette $\tilde{a}_{-2}, \tilde{b}_{-1}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}_2, \tilde{b}_3, \tilde{a}_4$, e si applichi la relazione (17) ai poligoni che si ottengono dividendo il triangolo $\tilde{Q}_1 \tilde{M}_1 \tilde{N}_1$ mediante le rette ora specificate, sulle quali le funzioni $w(\xi, \eta)$, $\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}$ presentano discontinuità. Scegliendo come funzione $v(\xi, \eta)$ la soluzione dell'equazione (12) che soddisfa le condizioni $v_\eta = 0$ su $\tilde{Q}_1 \tilde{M}_1$, $v_\xi = 0$ su $\tilde{Q}_1 \tilde{N}_1$, e assume il valore 1 in $\tilde{Q}_1$, se ne deduce la formula

$$(22) \quad w_{\tilde{Q}_1} = \frac{1}{2} [-(vw)_{\tilde{M}_1} + (vw)_{\tilde{N}_1}] + \frac{1}{2} \left[\int_{\tilde{M}_1}^{\tilde{B}_{-1}} - \int_{\tilde{B}_{-1}}^{\tilde{B}} + \int_{\tilde{B}}^{\tilde{B}_3} - \int_{\tilde{B}_3}^{\tilde{N}_1} \right] \tilde{\phi} d\eta +$$

$$+ \tilde{\alpha}(\tilde{A}, \tilde{I}_1) - \tilde{\alpha}(\tilde{A}_{-2}, \tilde{K}_1) + \tilde{\gamma}(\tilde{A}_2, \tilde{F}_1) - \tilde{\gamma}(\tilde{A}_4, \tilde{R}_1),$$

ove s'è posto

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &\equiv \left[w \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - v \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right]_{\eta = -\xi}, \quad \tilde{\alpha}(A, \tilde{I}_1) \equiv (vw)_{\tilde{I}_1}^- + \int_{\tilde{A}}^{\tilde{I}_1} w^- \tilde{\psi} d\eta, \\ \tilde{\alpha}(\tilde{A}_{-2}, \tilde{K}_1) &\equiv (vw)_{\tilde{K}_1}^- + \int_{\tilde{A}_{-2}}^{\tilde{K}_1} w^- \tilde{\psi} d\eta, \quad \tilde{\gamma}(\tilde{A}_2, \tilde{F}_1) \equiv (vw)_{\tilde{F}_1}^- - \int_{\tilde{A}_2}^{\tilde{F}_1} w^- \tilde{\psi} d\eta, \\ \tilde{\gamma}(\tilde{A}_4, \tilde{R}_1) &\equiv (vw)_{\tilde{R}_1}^- - \int_{\tilde{A}_4}^{\tilde{R}_1} w^- \tilde{\psi} d\eta.\end{aligned}$$

Se ora si sceglie un punto qualsiasi $\tilde{Q} \equiv (\xi, \eta)$ di $\tilde{\Sigma}$, e si utilizza la relazione (17) con gli stessi criteri usati per il punto $\tilde{Q}_1$, si può verificare che si presentano le circostanze formali seguenti:

I) Ciascuno dei termini $(vw)_{\tilde{M}}^{\pm}$, $(vw)_{\tilde{N}}^{\pm}$ è munito del segno $+$ o del segno $-$ a seconda che nel corrispondente intervallo $(A, \tilde{M})$, $(A, \tilde{N})$ esistano un numero pari e dispari di punti $\tilde{B}_r$ intermedi.

II) Gli integrali del tipo $\int \tilde{\varphi} d\eta$ estesi agli intervalli consecutivi nei quali l'intervallo orientato $(\tilde{M}, \tilde{N})$ è suddiviso dai punti $\tilde{B}_r$ ad esso interni, hanno segni alterni, tenendo presente che il primo integrale, con estremo inferiore in $\tilde{M}$, ha segno opposto a quello di $(vw)_{\tilde{M}}^{\pm}$.

III) Quando il segmento di caratteristica $\tilde{Q}\tilde{M}$ interseca un certo numero di rette $\tilde{a}_{2-n}$ di equazioni $\eta - \xi = -2np(I)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), oltre i termini già menzionati sono presenti, ciascuno col segno $+$ o col segno $-$ a seconda che il corrispondente valore di n sia pari o dispari, i termini $\tilde{\alpha}$ valutati su tali rette.

IV) Se il segmento di caratteristica $\tilde{Q}\tilde{N}$ interseca rette $\tilde{a}_{2-m}$ di equazioni $\eta - \xi = 2mp(I)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) sono da aggiungersi, col segno $+$ o col segno $-$ a seconda che il corrispondente valore di m sia dispari o pari, i termini $\tilde{\gamma}$ valutati sulle rette $\tilde{a}_{2-m}$.

Precisata così la legge generale di composizione per l'espressione formale delle soluzioni della (1)'', si osservi che alla (22) corrisponde nel piano Axt

$$\begin{aligned}(22)' \quad u(x_1, t_1) &= \frac{1}{2} [-(uv)_{M_1} + (uv)_{N_1}] + \frac{1}{4} \left[\int_{M_1}^{B_{-1}} - \int_{B_{-1}}^B + \int_B^{B_3} - \int_{B_3}^{N_1} \right] \frac{\varphi}{\sqrt{f}} dx + \\ &+ \alpha(A, I_1) - \alpha(A_{-2}, K_1) + \gamma(A_2, F_1) - \gamma(A_4, R_1)\end{aligned}$$

essendo $v(x, t)$ la trasformata di $v(\xi, \eta)$ e ⁽⁸⁾

$$\alpha(A, I_1) \equiv (uv)_{I_1}^- + \frac{1}{2} \int_0^{t_{I_1}} (u^- \psi)_{x=0} dt, \quad \alpha(A_{-2}, K_1) \equiv (uv)_{K_1}^- + \frac{1}{2} \int_0^{t_{K_1}} (u^- \psi)_{x=-2l} dt, \text{ ecc.,}$$

(8) Per tutte le altre funzioni e per i punti sono state adoperate le medesime lettere private del simbolo $\sim$.

$$M_1 \equiv [q(p(x_1) - t_1), 0] \quad , \quad B_{-1} \equiv (-l, 0) \quad , \quad B \equiv (l, 0) \quad , \quad B_3 \equiv (3l, 0), \\ N_1 \equiv [q(p(x_1) + t_1), 0]$$

$t_{1_1} = t_1 - p(x_1)$, $t_{K_1} = t_1 - p(x_1) - 2p(l)$, ecc. Le funzioni α e γ sono da considerare nulle quando i corrispondenti estremi superiori t_{1_1} , t_{K_1} , $\dots$ sono negativi. Si tenga presente inoltre che sull'asse x le funzioni $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ sono assegnate, e si ha $\varphi \equiv 2 \left[u_0(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{t=0} - \dot{u}_0(x) \cdot v(x, 0) \right]$; sulle rette $a_{\pm 2n}$ la funzione $u^-(x, t)$ coincide con la data $\zeta(t)$, e la ψ ha l'espressione $\psi \equiv 2 \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sqrt{f(x)} + 2v(x, t) m(x) \right]_{x=\pm 2nl}$. La (22)' pone pertanto in evidenza in qual modo lo spostamento del generico punto del corpo elastico, a un istante assegnato, si esprima mediante i dati del problema e un'opportuna soluzione dell'equazione (12).

5. CORPO ELASTICO OMOGENEO. - Se le funzioni $S(x)$ e $\mu(x)$ si riducono a due costanti, ponendo $f(x) = V^2$, si ha $p(x) = x/V$ e la trasformazione (6) diventa $\xi = \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{V} \right)$, $\eta = \frac{1}{2} \left(t + \frac{x}{V} \right)$. L'operatore L coincide con il suo aggiunto, e come funzione di Riemann si ha $v \equiv 1$. La (22)' diventa in tal caso

$$u(x_1, t_1) = \frac{1}{2} [-u_0(x_1 - Vt_1) + u_0(x_1 + Vt_1)] + \frac{1}{2V} \left[- \int_{x_1 - Vt_1}^{-l} \dot{u}_0(x) dx + \int_{3l}^{x_1 + Vt_1} \dot{u}_0(x) dx \right] + \\ + \zeta \left(t_1 - \frac{x_1}{V} \right) - \zeta \left(t_1 - \frac{x_1 + 2l}{V} \right) + \zeta \left(t_1 + \frac{x_1 - 2l}{V} \right) - \zeta \left(t_1 + \frac{x_1 + 4l}{V} \right)$$

avendosi

$$(\varphi)_{t=0} \equiv -2 \dot{u}_0(x) \quad , \quad \psi \equiv 0 \quad , \quad \int_{\tilde{B}_r} \frac{\varphi}{\sqrt{f}} dx = 0 \quad (r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

e $Q_1 \equiv (x_1, t_1)$ contenuto nel triangolo di lati $x = l$, $t = \frac{3l - x}{V}$, $t = \frac{3l + x}{V}$.

Nel caso particolare che risulti $u_0(x) \equiv 0$, $\dot{u}_0 = 0$ per $x \neq 0$, e $\zeta(t) = A \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \frac{2l}{V} \right)$ con $A > 0$, $\tau = \frac{4l}{V}$, per il calcolo della pressione nell'estremo con moto prescritto si deducono le formule seguenti (9):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^{t=(2n+1)2l/V} = -(4n+1) \frac{A\pi}{2l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^{t=(2n+1)l/V} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0}^{t=4nl/V} = (4n-1) \frac{A\pi}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(9) Cfr. lavoro cit. in (2), p. 89.