
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIETRO BENVENUTI

**Sul problema ergodico relativo ad una singola
funzione**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.3, p. 368–372.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_368_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sul problema ergodico relativo ad una singola funzione*^(*). Nota di PIETRO BENVENUTI, presentata^(**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — By a new formulation of the classical Birkhoff's theorem, a necessary and sufficient condition is given for the ergodicity of a random variable.

1. INTRODUZIONE. — La costruzione rigorosa della meccanica statistica è basata sulla formulazione di condizioni necessarie e sufficienti per la ergodicità delle funzioni di fase cioè per la eguaglianza delle medie temporali e delle medie spaziali.

Inizialmente Birkhoff e Khinchin hanno dato una trattazione estremamente generale del problema ergodico, considerando l'insieme di tutte le funzioni sommabili. La condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di tutte queste funzioni è, come noto, la transitività metrica dell'insieme invariante dello spazio delle fasi a cui appartiene il punto rappresentativo del sistema fisico considerato. Questa condizione risulta però poco efficace sia perché in generale è difficile verificare se essa è soddisfatta sia perché, nei casi più comuni in cui tale verifica è possibile, la condizione stessa non risulta soddisfatta.

Ci si è quindi orientati più recentemente verso una trattazione ristretta del problema ergodico cioè verso la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti affinché risulti ergodica ogni funzione appartenente ad un sottoinsieme più ristretto di quello delle funzioni sommabili e naturalmente contenuto in esso.

Nel presente lavoro tale criterio è stato spinto alle sue estreme conseguenze stabilendo una condizione necessaria e sufficiente affinché risulti ergodica non già ogni funzione di un certo insieme ma una determinata funzione sommabile. Per ottenere la condizione indicata ci si è valse sostanzialmente di una nuova formulazione del classico teorema di Birkhoff e dei suoi corollari. È evidente che la condizione ottenuta è la più larga che sia possibile formulare per un problema ergodico ristretto e fornisce inoltre una soluzione diretta di tale problema.

Per dare maggiore generalità ai risultati ottenuti, il lavoro viene sviluppato, com'è ormai d'uso comune, in uno spazio misurabile astratto.

2. PREMESSE. — Sia $(X, \mathfrak{A}, m)$ uno *spazio di probabilità*, costituito dall'insieme X degli eventi elementari x , da una σ -algebra $\mathfrak{A}$ di sottoinsiemi di X , e da una misura di probabilità m definita su $\mathfrak{A}$ ⁽¹⁾.

(*) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

(1) Una σ -algebra è una famiglia chiusa rispetto alla operazione di complementazione e rispetto alla operazione di unione di un numero finito o di una infinità numerabile di sottoinsiemi della famiglia; una misura di probabilità è una funzione positiva di insieme, completamente additiva e tale che $mX = 1$.

Sia T_t ($t \geq 0$) un semigruppato abeliano di trasformazioni misurabili dipendenti dal parametro temporale t variabile nel continuo ⁽²⁾, ciascuna delle T_t muta X in sè e conserva la misura m .

L'insieme $(X, \mathfrak{A}, m, T_t)$ costituisce un *processo stazionario continuo*.

Sia infine L l'insieme delle *variabili aleatorie* con valore medio finito, cioè l'insieme delle funzioni $f(x)$ a valori reali, definite quasi ovunque in X , misurabili e sommabili. Per ogni $f(x) \in L$ e per quasi tutti gli eventi $x \in X$ è definita la *media temporale limitata* ⁽³⁾:

$$(2.1) \quad \hat{f}_\tau(x, t_0) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(T_t x) dt \quad t_0 \geq 0 \quad \tau > 0.$$

Il teorema di Birkhoff ⁽⁴⁾ assicura l'esistenza del limite (per $\tau \rightarrow +\infty$) della media temporale limitata $\hat{f}_\tau$ per quasi tutti gli x ; questo limite risulta indipendente da t_0 e viene indicato brevemente come *media temporale* $\hat{f}(x)$:

$$(2.2) \quad \hat{f}(x) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} f(T_t x) dt = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(T_t x) dt.$$

La indipendenza da t_0 della *media temporale* $\hat{f}(x)$ mostra che la funzione $\hat{f}(x)$ è invariante per le trasformazioni T_t :

$$(2.3) \quad \hat{f}(T_t x) = \hat{f}(x)$$

La $\hat{f}(x)$ risulta definita quasi dovunque in X , con l'esclusione di un eventuale insieme invariante ⁽⁵⁾ di misura nulla. Un corollario del teorema di Birkhoff assicura che $\hat{f}(x)$ è misurabile e sommabile e che il suo valore medio (*media spaziale*) è pari al valore medio della $f(x)$ stessa:

$$(2.4) \quad \int_X \hat{f}(x) dm = \int_X f(x) dm \equiv \bar{f}_X.$$

Tra gli insiemi della σ -algebra $\mathfrak{A}$ si considerino quelli che sono invarianti. La famiglia formata da tutti gli insiemi invarianti è una sotto- σ -algebra $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$) subordinata su $\mathfrak{A}$ alle trasformazioni T_t : infatti se C è invariante

(2) Con ciò si intende che è $T_t(T_{t'}x) = T_{t+t'}x$ e che $T_t x$ è misurabile nel prodotto cartesiano di X e del semiasse $t \geq 0$.

Le trasformazioni T_t non sono necessariamente invertibili; se lo sono e se le inverse sono misurabili, posto $T_t^{-1} = T_{-t}$, risulta definito un gruppo abeliano di trasformazioni.

(3) Nelle ipotesi fatte sulle trasformazioni T_t , il teorema di Fubini assicura che per quasi tutti gli $x \in X$ la funzione $f_x(t) = f(T_t x)$ è misurabile e sommabile in ogni intervallo finito.

(4) Cfr. P. R. HALMOS, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea 1956, pp. 18-24.

(5) Un insieme $A \in \mathfrak{A}$ è invariante se per ogni valore di t risulta: $T_t^{-1}A = A$ essendo $T_t^{-1}A$ l'insieme degli eventi $x \in X$ per i quali è $T_t x \in A$; in altri termini, un insieme $A \in \mathfrak{A}$ è invariante se, contenendo x , contiene anche $T_t x$ per ogni valore di t e contiene inoltre ogni x' per il quale sia $T_t x' = x$ per qualche valore di t .

anche il suo complementare $X - C$ è invariante e la unione di un numero finito o di una infinità numerabile di insiemi invarianti è ancora invariante.

Il teorema di Birkhoff sussiste anche quando si restringano le trasformazioni T_t ad un qualunque insieme invariante di misura non nulla; applicando la (2.4) ad ognuno di questi insiemi si ottiene il seguente teorema che costituisce una formulazione più completa del teorema di Birkhoff stesso poiché fornisce anche una caratterizzazione della funzione limite $\hat{f}(x)$:

TEOREMA 1. - *La media temporale di una qualunque variabile aleatoria $f(x) \in L$ è anch'essa una variabile aleatoria $\hat{f}(x) \in L$ che possiede le seguenti proprietà:*

$$a) \quad \hat{f}(x) \quad \text{è} \quad \mathcal{C}\text{-misurabile}$$

$$b) \quad \int_C \hat{f}(x) \, dm = \int_C f(x) \, dm \quad \text{per ogni} \quad C \in \mathcal{C}$$

Queste proprietà individuano la media temporale $\hat{f}(x)$ a meno di una funzione $\mathcal{C}$ -equivalente a zero.

Per dimostrare la *a)* basta osservare che essa è equivalente alla proprietà di invarianza della $\hat{f}(x)$ espressa dalla (2.3) ⁽⁶⁾. La equazione *b)* sussiste palesemente per gli insiemi invarianti di misura nulla e si riduce alla identità $0 = 0$; nel caso più significativo in cui sia $mC \neq 0$, la equazione *b)* è ciò cui si riduce la (2.4) quando si restringano le trasformazioni T_t allo insieme invariante C considerato.

Per completare la dimostrazione basta osservare che se $f^*(x)$ è un'altra funzione che gode delle proprietà *a)* e *b)*, la differenza $\hat{f}(x) - f^*(x)$ è una funzione $\mathcal{C}$ -misurabile ed ha integrale nullo su ogni insieme $C \in \mathcal{C}$; per un ben noto teorema di teoria della integrazione, la differenza $\hat{f}(x) - f^*(x)$ deve risultare nulla quasi dovunque, con l'esclusione cioè di un insieme $C \in \mathcal{C}$ di misura nulla.

Il teorema stabilito mostra che la trasformazione U^* , che associa ad ogni variabile aleatoria $f(x) \in L$ la sua media temporale, è individuata dalla σ -algebra $\mathcal{C}$, pertanto a due processi stazionari diversi, definiti sullo stesso spazio di probabilità, resta associata la stessa trasformazione U^* se nei due processi è unica la σ -algebra $\mathcal{C}$ degli insiemi invarianti.

Le proprietà ergodiche del processo stazionario $(X, \mathcal{A}, m, T_t)$ sono individuate in questo modo dall'insieme $(X, \mathcal{A}, m, \mathcal{C})$ dello spazio di probabilità e della σ -algebra $\mathcal{C}$ degli insiemi invarianti.

Il teorema di Birkhoff ed il teorema 1 sussistono anche per un *processo stazionario discreto* $(X, \mathcal{A}, m, T_k)$ per il quale la media temporale è definita

(6) Se $g(x)$ è $\mathcal{A}$ -misurabile, l'immagine inversa $g^{-1}B$ di un qualunque Borelliano è un insieme $A \in \mathcal{A}$; se però $g(x)$ è invariante, in A si trovano, assieme ad un evento x , tutti i suoi trasformati $T_t x$ e tutti gli eventi x' tali che $T_t x' = x$ poiché su questi eventi la funzione assume lo stesso valore che assume su x ; pertanto $g^{-1}B \in \mathcal{C}$ e la funzione $g(x)$ risulta $\mathcal{C}$ -misurabile. Viceversa se $g(x)$ è $\mathcal{C}$ -misurabile, l'insieme degli eventi x per i quali è $g(x) = g(x_0)$ è invariante (appartiene a $\mathcal{C}$) e contiene assieme a x_0 tutti i suoi trasformati $T_t x_0$; risulta quindi per ogni x_0 e per ogni t : $g(T_t x_0) = g(x_0)$ e pertanto la funzione $g(x)$ è invariante.

dal limite:

$$\hat{f}(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(T_k x).$$

La caratterizzazione della trasformazione U^* attraverso la σ -algebra degli insiemi invarianti, permette di studiare in maniera unitaria le proprietà ergodiche di un processo stazionario continuo o discreto. Un'applicazione immediata ed elementare del teorema 1 nel caso in cui le trasformazioni T_t siano invertibili con inverse misurabili permette in particolare di riconoscere che per ogni $f(x) \in L$ sono coincidenti quasi dovunque i due limiti:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(T_t x) dt \quad \text{e} \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(T_{-t} x) dt.$$

Questa applicazione mostra il vantaggio che si ottiene nello studio delle proprietà ergodiche, dalla sostituzione delle trasformazioni T_t con la σ -algebra $\mathcal{C}$ ad esse associata.

3. CARATTERIZZAZIONE DELLE VARIABILI ALEATORIE ERGODICHE. — Seguendo una denominazione introdotta da Khinchin ⁽⁷⁾ chiameremo *ergodiche* quelle variabili aleatorie $f(x) \in L$ per le quali la media temporale è costante per x variabile in X o almeno in quasi tutto X . In virtù della (2.4) per una variabile aleatoria *ergodica* risulta:

$$(3.1) \quad \hat{f}(x) = \bar{f}_X \quad \text{quasi dovunque in } X.$$

Il teorema 1 permette di ottenere con facilità una caratterizzazione delle variabili aleatorie *ergodiche*, in corrispondenza ad un assegnato processo stazionario, mediante il seguente:

TEOREMA 2. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché una determinata variabile aleatoria $f(x) \in L$ sia ergodica è che per ogni insieme invariante C di misura non nulla risulti:*

$$(3.2) \quad \bar{f}_C \equiv \frac{1}{mC} \int_C f(x) dm = \bar{f}_X.$$

La necessità della condizione (3.2) è una conseguenza immediata della (3.1) e della *b*) del teorema 1; infatti se $f(x)$ è *ergodica*, per ogni $C \in \mathcal{C}$ risulta:

$$\int_C f(x) dm = \int_C \hat{f}(x) dm = \int_C \bar{f}_X dm = \bar{f}_X \cdot mC.$$

Anche la sufficienza della condizione è una conseguenza del teorema 1; infatti se è verificata la (3.2) risulta per ogni $C \in \mathcal{C}$

$$(3.3) \quad \int_C f(x) dm = mC \cdot \bar{f}_X = \int_C \bar{f}_X dm.$$

(7) Cfr. A. I. KHINCHIN, *Mathematical foundation of statistical mechanics*, Dover 1949 p. 66.

La funzione costante $\bar{f}_X$ è ovviamente una funzione $\mathcal{C}$ -misurabile e soddisfa quindi alla condizione *a*) del teorema 1; la (3.3) mostra che essa soddisfa anche alla condizione *b*). In virtù del teorema 1 la funzione costante $\bar{f}_X$ differisce dalla media temporale $\hat{f}(x)$ al più in un insieme di misura nulla e pertanto risulta quasi dovunque in X :

$$\hat{f}(x) = \bar{f}_X$$

e la funzione $f(x)$ è *ergodica*.

In definitiva il teorema 2 permette di individuare la classe delle variabili aleatorie *ergodiche* quando si conosca la σ -algebra $\mathcal{C}$ degli insiemi invarianti associata alle trasformazioni T_t assegnate.

È opportuno notare che per gli insiemi C di misura unitaria la condizione del teorema 2 è verificata da tutte le variabili aleatorie di L . Infatti se $mC = 1$ è $C = X - N$ con $mN = 0$ e quindi:

$$\int_C f(x) dm = \int_X f(x) dm = \bar{f}_X.$$

Viceversa se si pretende che la (3.2) sia verificata da tutte le variabili aleatorie di L , la (3.2) relativa ad un qualunque insieme invariante C di misura non nulla ed alla funzione $\delta_C(x)$ caratteristica dello stesso insieme invariante, comporta che sia:

$$mC = \int_C \delta_C(x) dm = \int_X \delta_C(x) dm \cdot mC = (mC)^2$$

e quindi $mC = 1$.

Questa osservazione mostra che il teorema 2 conduce alla *transitività metrica* come condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le $f(x) \in L$ siano *ergodiche*.

Se il processo stazionario non è metricamente transitivo, cioè se in $\mathcal{C}$ ci sono insiemi di misura non nulla e non unitaria, la (3.2) esprime una condizione effettiva che caratterizza, tra tutte le variabili aleatorie di L , quelle che sono *ergodiche*.

4. CONCLUSIONI. - Le proprietà ergodiche di una trasformazione continua T_t , che rappresenta tutti i moti possibili di un sistema meccanico, sono determinate unicamente dalla σ -algebra $\mathcal{C}$ formata da tutti gli insiemi invarianti per le trasformazioni T_t . La conoscenza di tale σ -algebra fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di una generica ma ben determinata funzione di fase $f(x)$. In base al teorema 2 tale condizione è espressa dalla eguaglianza delle medie in fase della $f(x)$ su tutti gli insiemi della σ -algebra $\mathcal{C}$ di misura non nulla.

Questa condizione ha un effettivo significato statistico perché sostituisce alla conoscenza della trasformazione T_t la conoscenza della famiglia degli insiemi invarianti di misura non nulla.