Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Emilia Scrucca

Un problema ai limiti quasi lineare in spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.3, p. 361–364.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_361_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Equazioni differenziali. — *Un problema ai limiti quasi lineare in spazi di Banach* (*). Nota di EMILIA SCRUCCA, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — An existence theorem is proved for an ordinary differential equation of the form $\dot{x} - A(t)x = f(t,x)$ with a non-linear boundary condition $Bx = Hx$, where x, f belong to Banach spaces and A, B, H are given operators, A and B, linear.

Siano X e Ξ due spazi di Banach, t una variabile reale $t \in \Delta = [\alpha, \omega]$ e $C(\Delta, X)$ lo spazio di Banach delle funzioni $t \to x(t)$ fortemente continue in Δ a valori in X con la norma:

$$|x|_C = \sup_{\Delta} |x(t)|_X .$$

Sia $\tilde{X}$ l'algebra degli endomorfismi M di X cioè l'insieme degli operatori lineari e continui di X in sè stesso con la norma:

$$|M|_{\tilde{X}} = \sup_{x \in X} |Mx|_X / |x|_X .$$

Consideriamo il problema differenziale ai limiti:

$$(1) \qquad \begin{cases} (E_1) & dx/dt - A(t)x = f(t,x) \\ (C_1) & Bx = Hx \end{cases}$$

dove $t \to A(t)$ è una funzione da Δ in $\tilde{X}$, $(t,x) \to f(t,x)$ è una funzione da $\Delta \times X$ in X, B è un operatore lineare e continuo con dominio $\mathfrak{D}(B) = C(\Delta, X)$, codominio $\mathfrak{R}(B) \subset \Xi$ e dove H è un operatore continuo con dominio $\mathfrak{D}(H) = C(\Delta, X)$, codominio $\mathfrak{R}(H) \subset \Xi$.

Diremo soluzione secondo Caratheodory delle (1) una funzione $x \in C(\Delta, X)$ fortemente assolutamente continua in Δ, verificante la (C_1) e verificante q.o. la (E_1).

Lo scopo della presente Nota è quello di dare un teorema di esistenza delle soluzioni di (1) sotto ipotesi che generalizzano quelle usate da G. Pulvirenti [1] relative al caso di H costante.

Questo teorema generalizza anche un altro lavoro di G. Pulvirenti [2] in cui $X = R^n$ cioè in cui lo spazio X è lo spazio euclideo ad n dimensioni.

Supponiamo che:

a) $A(t)$ sia fortemente misurabile in Δ e si abbia:

$$\int_{\Delta} |A(t)|_{\tilde{X}} \, dt < \infty ;$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 11 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

b) per ogni $x \in X$ la $t \to f(t, x)$ sia fortemente misurabile in Δ, e per quasi tutti i $t \in \Delta$ la $x \to f(t, x)$ sia fortemente continua in X. Inoltre sia:

$$|f(t, x)|_X \leq \beta(t), \qquad (t, x) \in \Delta \times X$$

per qualche $t \to \beta(t)$ reale, integrabile in Δ;

c) B e H siano tali che;

$$N(B) = \{x : Bx = 0\} \neq \{0\} \quad , \quad \mathfrak{R}(H) \subseteq \mathfrak{R}(B)$$

ed esista un $h > 0$ tale che $|Hx|_\Xi \leq h$.

L'ipotesi *a*) assicura che $A(t)$ è integrabile secondo Bochner in Δ ([3], p. 80) e che esiste una ed una sola funzione $(t, s) \to U(t, s)$ di $\Delta \times \Delta$ in $\tilde{X}$, assolutamente continua in Δ rispetto a t, s separatamente, continua in $\Delta \times \Delta$ tale che:

$$U(t, s) = I + \int_s^t A(\theta)\, U(\theta, s)\, d\theta, \qquad (t, s) \in \Delta \times \Delta \tag{2}$$

dove I è l'identità di $\tilde{X}$.

Dalla (2) si ha:

$$U(t, s)\, U(s, r) = U(t, r), \qquad (t, s, r) \in \Delta \times \Delta \times \Delta$$

ed inoltre:

$$\frac{\partial U(t, s)}{\partial t} = A(t)\, U(t, s) \qquad \text{q.o. } t \in \Delta, \text{ per ogni } s \in \Delta.$$

Quest'ultima comporta che le soluzioni secondo Caratheodory dell'equazione lineare omogenea:

$$dx/dt - A(t)\, x = 0 \tag{E$_0$}$$

sono definite in Δ e costituiscono uno spazio isomorfo a X, essendo per ogni $s \in \Delta$ l'isomorfismo definito da: $x \to U(\cdot, s)\, x$.

L'ipotesi *b*) assicura che, se $x \in C(\Delta, x)$, la funzione $s \to f(s, x(s))$ è integrabile in Δ secondo Bochner [4], cosicché ([3], p. 83) ha senso considerare, per ogni $x \in C(\Delta, x)$ ed ogni $\tau \in \Delta$, l'integrale

$$\int_\tau^t U(t, s)\, f(s, x(s))\, ds\,.$$

Posto per comodità $D = d/dt - A(t)$ ed indicato con $N(D)$ lo spazio nullo di D cioè l'insieme delle soluzioni di (E_0), supponiamo che:

d) se B_0 è la restrizione di B a $N(D)$, esista un operatore Λ lineare e continuo con dominio $\mathfrak{D}(\Lambda) = \Xi$ e codominio $\mathfrak{R}(\Lambda) = N(D)$ tale che valga:

$$x \in C(\Delta, X) \Rightarrow (I_\Xi - B_0 \Lambda) \left(Hx - B \int_\tau^t U(t, s)\, f(s, x(s))\, ds\right) = 0\,;$$

e) fissato $x_0 \in \mathrm{N}(\mathrm{B}_0) = \{x : \mathrm{B}_0 x = 0)\}$, e posto:

$$\mathrm{T}_0 x(t) = x_0 + \Lambda \mathrm{H} x - \Lambda \mathrm{B} \int_\tau^t \mathrm{U}(t,s)\, f(s, x(s))\, ds + \int_\tau^t \mathrm{U}(t,s)\, f(s, x(s))\, ds$$

$\mathrm{T}_0 x(t)$ assuma valori appartenenti ad un insieme relativamente compatto di X per ogni $t \in \Delta$, qualunque sia $x \in \mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X})$.

TEOREMA. – *Se sono verificate le ipotesi a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *il problema* (1) *ammette almeno una soluzione.*

Si verifica facilmente, che T_0 definisce una trasformazione di $\mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X})$ in sè e che il problema (1) è risolto qualora sia provata l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione:

$$\mathrm{T}_0 x = x. \tag{3}$$

Infatti, poiché $x_0 + \Lambda \mathrm{H} x - \Lambda \mathrm{B} \int_\tau^t \mathrm{U}(t,s)\, f(s, x(s))\, dx \in \mathrm{N}(\mathrm{D})$, si ha: $x \in \mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X}) \Rightarrow \mathrm{D}\mathrm{T}_0 x(t) = f(t, x(t))$, q.o. $t \in \Delta$, nonché, sfruttando l'ipotesi *d*): $x \in \mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X}) \Rightarrow \mathrm{B}\mathrm{T}_0 x = \mathrm{H} x$.

Per dimostrare l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione (3) sarà utilizzato il teorema di Schauder applicato alla trasformazione T_0. Osserviamo intanto che:

$$|\mathrm{U}(t,s)|_{\hat{\mathrm{X}}} \leq 1 + \left| \int_s^t |\mathrm{A}(\vartheta)|_{\hat{\mathrm{X}}}\, |\mathrm{U}(\vartheta, s)|_{\hat{\mathrm{X}}}\, d\vartheta \right|, \qquad (t, s) \in \Delta \times \Delta$$

e dal lemma di Gronwall segue:

$$|\mathrm{U}(t,s)|_{\hat{\mathrm{X}}} \leq \exp\left(\left| \int_s^t |\mathrm{A}(\vartheta)|_{\hat{\mathrm{X}}}\, d\vartheta \right| \right). \tag{4}$$

Allora da *a*), *b*), *c*), e dalla limitatezza di B e Λ abbiamo:

$$|\mathrm{T}_0 x|_{\mathrm{C}} \leq |x_0|_{\mathrm{C}} + |\Lambda| h + (1 + |\Lambda|\,|\mathrm{B}|) \exp\left(\int_\Delta |\mathrm{A}(\vartheta)|_{\hat{\mathrm{X}}}\, d\vartheta \right) \int_\Delta \beta(s)\, ds = \mu < +\infty.$$

Perciò T_0 trasforma in sé la sfera di $\mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X})$

$$\mathrm{S} : |x|_{\mathrm{C}} \leq \mu.$$

Inoltre T_0 è continua in $\mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X})$. Infatti se $x_k \to x$ (in senso forte) in $\mathrm{C}(\Delta, \mathrm{X})$ da *b*) e da (4) segue:

$$\int_\tau^t \mathrm{U}(t,s)\, f(s, x_k(s))\, ds \to \int_\tau^t \mathrm{U}(t,s)\, f(s, x(s))\, ds$$

in $C(\Delta, X)$, applicando un teorema di passaggio al limite sotto il segno d'integrale, che è una generalizzazione di quello di Lebesgue ([3], p. 83); quindi per la continuità di H, B e Λ segue: $T_0 x_k \to T_0 x$ in $C(\Delta, X)$.

Ed infine da *a*), *b*), *e*), e dalle proprietà di $U(t, s)$ segue che T_0 muta $C(\Delta, X)$ in un insieme equicontinuo. Infatti per ogni $x \in C(\Delta, X)$, $t \to T_0 x(t) - \int_\tau^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds$ appartiene a N(D), il quale, si verifica facilmente, è un insieme equicontinuo e inoltre, poiché si ha:

$$t', t'' \in \Delta \Rightarrow \left| \int_\tau^{t''} U(t'', s) f(s, x(s))\, ds - \int_\tau^{t'} U(t', s) f(s, x(s))\, ds \right|_X \leq$$

$$\leq \exp\left(\int_\Delta |A(\vartheta)|_{\tilde{X}}\, d\vartheta \right) \left\{ |U(t'', \tau) - U(t', \tau)|_{\tilde{X}} \int_\Delta \beta(s)\, ds + \left| \int_{t'}^{t''} \beta(s)\, ds \right| \right\}$$

anche $t \to \int_\tau^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds$, al variare di x in $C(\Delta, X)$ descrive un insieme equicontinuo. Tenendo conto dell'ipotesi *e*), con un ragionamento analogo a quello che si fa per provare il teorema di Ascoli nel caso delle funzioni reali, $T_0 S$ risulta relativamente compatto.

Osservazione 1. – Se B_0 ammette inversi destri lineari e continui B_0^+. la condizione *d*) è sempre soddisfatta da $\Lambda = B_0^+$. Se B_0 non ammette inversi sinistri, $N(B_0)$ ha dimensione infinita cosicché si possono considerare infinite trasformazioni T_0. Se B_0 ammette l'inverso B_0^{-1} la condizione *d*) è sempre soddisfatta da $\Lambda = B_0^{-1}$, $x_0 = 0$ e si ha:

$$T_0 x(t) = B_0^{-1} Hx - B_0^{-1} B \int_\tau^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds + \int_\tau^t U(t, s) f(s, x(s))\, ds .$$

Osservazione 2. – Le condizioni $|f(t, x)|_X \leq \beta(t)$, $|Hx|_\Xi \leq h$ si potrebbero generalizzare analogamente a quanto si trova in [1] e [2].

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. PULVIRENTI, *Problemi lineari per le equazioni differenziali ordinarie in uno spazio di Banach*, « Le Matematiche », *15* (2), 98–107 (1960).

[2] G. PULVIRENTI, *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni quasi lineari*, « Le Matematiche », *16*, (1) 27–42 (1961).

[3] E. HILLE e R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups* (revised ed.), « Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. », *31* (1957).

[4] G. PULVIRENTI, *Equazioni differenziali in uno spazio di Banach. Teorema di esistenza e struttura del pennello delle soluzioni in ipotesi di Caratheodory*, « Ann. Math. pura e appl. », ser. IV, *56*, 281–299 (1961).

[5] J. L. MASSERA e J. J. SCHÄFFER, *Linear differential equations and functional analysis*, I, « Ann. of Math. », *67*, 517–573 (1958).