Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Grandolfi

Problemi ai limiti per le equazioni differenziali multivoche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.3, p. 355–360.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_355_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Equazioni differenziali. — *Problemi ai limiti per le equazioni differenziali multivoche* (*). Nota di MARIA GRANDOLFI, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — This paper extends an existence theorem due to A. Lasota–Z. Opial on boundary value problems for multi-valued differential equations to the case when the homogeneous problem has non-trivial solutions.

1. Recentemente A. Lasota e Z. Opial [5] [1] hanno affrontato il problema ai limiti costituito da una «equazione differenziale multivoca» [2].

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) \in F(t, x(t)) \tag{1}$$

con condizioni lineari:

$$Lx = r \tag{2}$$

e lo hanno risolto nell'ipotesi:

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) = 0 \quad , \quad Lx = 0 \Longleftrightarrow x(t) \equiv 0 \,, \tag{3}$$

applicando un teorema di punti fissi dovuto a Ky Fan [4].

Scopo principale di questo lavoro è quello di far vedere come la stessa tecnica consenta di risolvere il problema (1) (2) in ipotesi su A, L più generali della (3).

2. Sia Δ un intervallo compatto della retta euclidea.

R^n indica, come di consueto, lo spazio euclideo (reale) n-dimensionale, con norma $|x|$. Sia $\mathcal{A}$ l'algebra delle matrici (reali) $n \times n$.

Seguendo L.O. il simbolo $|S|$, quando S è un sottinsieme di R^n, significa $\sup\limits_{x \in S} |x|$.

Se E è uno spazio lineare normato, o anche una varietà lineare di uno spazio lineare normato, con $cf(E)$ si indica la famiglia degli insiemi contenuti in E, chiusi, convessi, non vuoti.

Precisiamo ora il significato della (1). Siano:

a) $A : t \to A(t)$ una funzione da Δ in $\mathcal{A}$ misurabile e integrabile;

b) $F : (t, x) \to F(t, x)$ una funzione da $\Delta \times R^n$ in $cf(R^n)$, tale che:

*b*1) per ogni $x \in R^n$, $t \to F(t, x)$ è misurabile in Δ, ossia per ogni $p \in R^n$, la distanza di p dall'insieme $F(t, x)$ è una funzione misurabile in Δ;

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 11 del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

(1) In seguito indicheremo questo lavoro con L.O.

(2) Per le proprietà relative alle funzioni multivoche: C. Berge [3].

b_2) per ogni $t \in \Delta$, $x \to F(t, x)$ è semi–continua superiormente (s.c.s.) in R^n, ossia per ogni coppia di successioni $\{x_i\}, \{y_i\} \subset R^n$ le condizioni $x_i \to x_0$, $y_i \to y_0$ e $y_i \in F(t, x_i)$ implicano: $y_0 \in F(t, x_0)$;

b_3) esistono due funzioni $t \to \alpha(t)$, $t \to \beta(t)$ misurabili e integrabili in Δ tali che:

$$|F(t, x)| \leq \alpha(t) + \beta(t)|x|, \qquad (t, x) \in \Delta \times R^n.$$

Si dirà allora che una funzione $t \to x(t)$ da Δ in R^n è soluzione della (1) se essa è assolutamente continua e si ha:

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) \in F(t, x(t)) \qquad q.o. \text{ in } \Delta.$$

Precisiamo ora il significato della (2) e dell'ipotesi (3). Indichiamo con C^n lo spazio delle funzioni $t \to x(t)$ da Δ in R^n, continue, con la norma consueta $\|x\|_c = \max_{\Delta} |x(t)|$.

Seguendo L.O.:

c) L sia un operatore lineare continuo da C^n in R^n, $r \in R^n$.

Allora, se indichiamo con $(L^1)^n$ lo spazio delle funzioni $t \to f(t)$ da Δ in R^n, misurabili e integrabili con la norma: $\|f\|_{L^1} = \int_{\Delta} |f(t)|\,dt$, la (3) equivale alla:

H) il problema:

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) = f(t), \quad Lx = r \tag{4}$$

ammetta una sola soluzione per ogni $f \in (L^1)^n$ ed ogni $r \in R^n$.

In luogo di c), H) noi supporremo che:

d) L sia un operatore lineare continuo da C^n in R^m, $r \in R^m$.

H_1) A, L, r siano tali che il problema (4) ammetta soluzioni per tutte le f di una varietà lineare Φ_r di $(L^1)^n$.

H_2) detto $\mathcal{F}(x)$, per ogni $x \in C^n$, l'insieme delle $y : \Delta \to R^n$ misurabili, tali che $y(t) \in F(t, x(t))$ q.o. in Δ, sia $\mathcal{F}(v) \in cf(\Phi_r)$, per ogni $v \in C^n$ tale che $Lv = r$.

3. Come è ben noto, da a) segue l'esistenza di una sola funzione $(t, s) \to U(t, s)$ da $\Delta \times \Delta$ in $\mathfrak{A}$, continua in $\Delta \times \Delta$, soluzione dell'equazione:

$$U(t, s) = I_n + \int_s^t A(\tau)\,U(\tau, s)\,d\tau$$

essendo I_n l'identità in $\mathfrak{A}$.

$U(\cdot, s)$ è un operatore lineare, continuo, (anzi compatto), da R^n in C^n cosicché il prodotto di composizione:

$$L_U = L \circ U(\cdot, s)$$

è un operatore lineare da R^n in R^m; quindi esso si può rappresentare con una matrice $m \times n$.

D'altronde [6] ogni matrice $m \times n$ ammette inverse generalizzate, vale a dire esistono matrici L_U^* di tipo $n \times m$ tali che:

$$L_U L_U^* L_U = L_U .$$

Fissato $s \in \Delta$, definiamo allora l'operatore lineare:

$$\Gamma : f \to \Gamma f = -U(t, s) L_U^* L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau + \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau$$

da $(L^1)^n$ in C^n. Si può dimostrare facilmente, mediante il teorema di Ascoli–Arzelà, che esso è un operatore compatto.

Fissiamo poi una soluzione $c \in R^n$ di $L_U c = 0$ e poniamo:

$$Hr = U(t, s)(c + L_U^* r)$$

Si verifica che se $f \in \Phi_r$ la funzione:

$$x = \Gamma f + Hr$$

è una soluzione di (4). La prima delle (4) è immediata; infatti, indicando con D l'operatore lineare $d/dt - A(t)$ da C^n in $(L^1)^n$, abbiamo:

$$\begin{aligned} D(\Gamma f + Hr) &= D\left(-U(t, s) L_U^* L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau\right) + D \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau + \\ &\quad + D(U(t, s)(c + L_U^* r)) = \\ &= D \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau = f(t) . \end{aligned}$$

Quanto alla seconda delle (4), si osservi che $f \in \Phi_r$ significa che ci sono degli $\eta \in R^n$ tali che $L_U \eta = r - L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau$, quindi:

$$\begin{aligned} L(\Gamma f + Hr) &= -L_U L_U^* L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau + L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau + L_U c + \\ &\quad + L_U L_U^* r = \\ &= L_U L_U^* \left(r - L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau\right) + L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau = \\ &= L_U L_U^* L_U \eta + L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau = \\ &= r - L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau + L \int_s^t U(t, \tau) f(\tau) \, d\tau = r . \end{aligned}$$

Per il Teorema 1 di L.O. la corrispondenza $x \to \mathfrak{F}(x)$ definisce una trasformazione limitata da C^n in $cf((L^1)^n)$, quindi per il Teorema 2 di L.O. $\Gamma\mathfrak{F}$ trasforma C^n in $cf(C^n)$ ed è s.c.s.

Di conseguenza:

$$T: \qquad x \to T(x) = \Gamma\mathfrak{F}(x) + \{Hr\}$$

è una trasformazione s.c.s. di C^n in $cf(C^n)$.

Per comodità indichiamo con $\mathbf{V}_r$ la varietà lineare di C^n:

$$\mathbf{V}_r = \{v \in C^n : Lv = r\}.$$

Per provare l'esistenza di soluzioni per il problema (1) (2) sotto le ipotesi *a*) *b*) *d*) H1) H2), è sufficiente mostrare l'esistenza di una funzione $v \in \mathbf{V}_r$ tale che $v \in T(v)$.

Per H2) T trasforma $\mathbf{V}_r$ in $cf(\mathbf{V}_r)$. Infatti la trasformazione $\mathfrak{F}$, ricordando l'ipotesi H2), trasforma $\mathbf{V}_r$ in $cf(\Phi_r)$; inoltre, per ogni $f \in \Phi_r$, $\Gamma f + Hr$ è una soluzione delle (4); quindi $\Gamma f + Hr \in \mathbf{V}_r$, ossia Γ trasforma Φ_r in $\mathbf{V}_r - \{Hr\}$. Essendo Γ lineare, $\Gamma\mathfrak{F}(v)$ è convesso per ogni $v \in \mathbf{V}_r$ e, ricordando che $\Gamma\mathfrak{F}$ è s.c.s., segue che $\Gamma\mathfrak{F}(v)$ è chiuso per ogni $v \in \mathbf{V}_r$. Quindi è dimostrato che T trasforma $\mathbf{V}_r$ in $cf(\mathbf{V}_r)$.

Per $x \in C^n$ e $z \in T(x)$, per l'ipotesi b_3) abbiamo:

$$\|z\|_c \leq \|\Gamma\| (\alpha_0 + \beta_0 \|x\|_c) + \|Hr\|_c \quad , \quad \alpha_0 = \int_\Delta \alpha(t)\, dt \tag{5}$$

dove $\|\Gamma\|$ indica la norma di Γ. Supponiamo $\beta_0 \|\Gamma\| < 1$ e poniamo:

$$K_\varrho = \{x \in C^n : \|x\|_c \leq \rho\} \quad , \quad \rho = (\alpha_0 \|\Gamma\| + \|Hr\|_c)(1 - \beta_0 \|\Gamma\|^{-1}) + a$$

$a > 0$, sufficientemente grande perché sia $K_\varrho \cap \mathbf{V}_r \neq \varnothing$.

Dalla (5) segue facilmente che $T(x) \subset K_\varrho$ per ogni $x \in K_\varrho$, cioè $T(K_\varrho) \subset K_\varrho$, dove $T(K_\varrho) = \bigcup_{x \in K_\varrho} T(x)$. Perciò si ha pure: $T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r) \subset K_\varrho \cap \mathbf{V}_r$.

Essendo $K_\varrho \cap \mathbf{V}_r$ limitato, per il Teorema 1 di L.O. $\mathfrak{F}(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$ è limitato e poiché Γ è compatto segue che $T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$ è relativamente compatto in C^n.

Consideriamo ora la chiusura convessa di $T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$ che indichiamo con $\overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$; abbiamo:

$$\overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r) \subset \overline{co}\,(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r) = K_\varrho \cap \mathbf{V}_r$$

poiché $\mathbf{V}_r$, come immagine inversa del punto r mediante l'operatore continuo L, è chiusa e $K_\varrho \cap \mathbf{V}_r$ è chiuso e convesso. Dunque:

$$T(\overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)) \subset T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r) \subset \overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r).$$

Quindi la trasformazione T s.c.s. trasforma in sé l'insieme compatto e convesso $\overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$ e, applicando il teorema di punti fissi di Ky Fan [4], segue l'esistenza di $v \in \overline{co}\, T(K_\varrho \cap \mathbf{V}_r)$ e quindi $v \in \mathbf{V}_r$, tale che $v \in T(v)$.

Abbiamo così il:

TEOREMA 1. – *Se valgono le ipotesi a), b), d),* H_1), H_2) *e se:*

$$\beta_0 = \int_\Delta \beta(t)\,dt$$

è abbastanza piccolo, il problema (1) (2) *ha soluzione.*

4. Se car. $L_U = m \le n$, allora (4) ha soluzioni per ogni $f \in (L^1)^n$ e ogni r e viceversa. Diciamo H_3) questa ipotesi.

Se vale H_3), $\Phi_r = (L^1)^n$ per ogni $r \in R^m$ e in questo caso la H_2) è senz'altro soddisfatta. Dal Teorema 1 segue quindi il:

TEOREMA 2. – *Se valgono le ipotesi a), b), d),* H_3) *e se:*

$$\beta_0 = \int_\Delta \beta(t)\,dt$$

è abbastanza piccolo, il problema (1) (2) *ha soluzione qualunque sia* $r \in R^m$.

Se car. $L_U = m = n$, allora esiste una sola matrice $\overset{*}{L}_U$ e questa è l'inversa di L_U, per cui l'unica soluzione di $L_U c = 0$ è $c = 0$. In questo caso si ha il:

TEOREMA 3 (di L.O.) – *Se valgono le ipotesi a), b), c),* H) *e se*:

$$\beta_0 = \int_\Delta \beta(t)\,dt$$

è abbastanza piccolo, il problema (1) (2) *ha soluzioni per ogni* $r \in R^n$.

5. Concludiamo con una applicazione del Teorema 1. Consideriamo il problema:

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) \in F(t, x(t)) \tag{1'}$$

$$x(T) - x(0) = 0 \tag{2'}$$

dove $A(t)$ è una matrice $n \times n$ periodica di periodo T e F: $(t, x) \to F(t, x)$ una funzione da $R \times R^n$ in $cf(R^n)$, tale che $F(t + T, x) = F(t, x)$.

Siano soddisfatte le ipotesi *a) b)* del Teorema 1 e sia:

$$dx(t)/dt - A(t)\,x(t) = f(t) \quad , \quad x(T) - x(0) = 0 \tag{4'}$$

con $f(t + T) = f(t)$, il problema analogo al problema (4) del n. 2. È ben noto che se il sistema omogeneo ($f(t) = 0$) ha soluzioni periodiche, anche il sistema aggiunto ne ha; indichiamo con Z lo spazio di queste soluzioni. Allora si ha:

$$\Phi_0 = \left\{ f \in (L^1)^n \quad : \quad \int_0^T z^*(t) f(t)\,dt = 0 \quad , \quad z \in Z \right\}.$$

Supponiamo che $F(t, v(t)) \in cf(\Phi_0)$ per ogni $v \in \mathbf{V}_0$, essendo $\mathbf{V}_0$ lo spazio delle funzioni da R in R^n continue e periodiche di periodo T. Allora (1') (2') ammette almeno una soluzione $x(t)$ e quindi la (1') ha almeno una soluzione periodica di periodo T.

Questa è una generalizzazione del teorema di I. Barbălat e A. Halanay [2] nel quale $F(t, x(t))$ è una funzione univoca.

BIBLIOGRAFIA.

[1] ANTOSIEWICZ H. A., *Boundary value problems for non-linear ordinary differential equations*, « Pacific. Jour. Math. », *17*, 191–197 (1966).

[2] BARBĂLAT I. e HALANAY A., *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles nonlinéaires*, « Rev. Math. Pures Appl. », *3*, 395–411 (1958).

[3] BERGE C., *Espaces topologiques – Fonctions multivoques*, « Coll. Univ. Math. » *3*, Dunod, Paris (1959).

[4] FAN KY, *Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, « Proc. Nat. Acad. Sci., USA », *38*, 121-126 (1952).

[5] LASOTA A. e OPIAL Z. *An application of the Kakutany–Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations*, « Bull. Acad. Pol. Sci. », *13*, 781–786 (1965).

[6] ROHDE C. A., *Some results on generalized inverses*, « SIAM Rev. », *8*, 201–205 (1966).