Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jindřich Nečas

Sur l'existence de la solution régulière pour le problème de Dirichlet de l'équation elliptique non linéaire d'ordre 2 k

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.3, p. 347–354.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_347_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Analisi matematica. — *Sur l'existence de la solution régulière pour le problème de Dirichlet de l'équation elliptique non linéaire d'ordre* $2k$. Nota di J. NEČAS, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — Il problema di Dirichlet è considerato per un'equazione a derivate parziali non lineare di tipo ellittico. Il problema vi è risoluto, riconducendolo allo studio di un'equazione differenziale ordinaria, nello spazio di Banach.

1. INTRODUCTION. – Cette note se rattache étroitement au travail [6] de l'auteur. On cherche une solution faible u de $C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique dans la forme de divergence

$$\sum_{|i|\leq k}(-1)^{|i|}D^i(a_i(x, D^j u)) = \sum_{|i|\leq k}(-1)^{|i|}D^i f_i \tag{1.1 a}$$

avec $f_i \in C^{(0),\mu}(\bar\Omega) \cdot C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ est l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont μ–höldériennes dans $\bar\Omega$, Ω étant un domaine borné à la frontière $\partial\Omega$, assez régulière. On désignera dans la suite en bref $\|u\| C^{(k),\mu}(\bar\Omega) = \|u\|_{k,\mu}$. La notation usuelle $D^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_N^{i_N}}$ est utilisée. Les conditions aux limites:

$$\frac{\partial^l u}{\partial n^l} = g_l\,,\ g_l \in C^{(k-l),\mu}(\partial\Omega), \qquad l = 0, 1, \cdots k-1, \tag{1.2 a}$$

où $\partial/\partial n$ signifie la dérivée selon la normale extérieure.

Satisfaire (1.1 a), cela signifie: pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ ($\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment continûment différentiables à support compact dans Ω) on a:

$$\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi a_i(x, D^j u)\,dx = \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi f_i\,dx. \tag{1.1 b}$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, on les écrit aussi sous la forme

$$u - u_0 \in \overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\bar\Omega), \tag{1.2 b}$$

où $u_0 \in C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$, $\dfrac{\partial^l u}{\partial n^l} = g_l$ sur $\partial\Omega$, $l = 0, 1, \cdots k-1$ et $\overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ est le sous–espace de $C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ des fonctions v telles que $\dfrac{\partial^l v}{\partial n^l} = 0$ sur $\partial\Omega$, $l = 0, 1, \cdots k-1$.

Cherchons $u(t, \tau)$ une application de la courbe $M = \{(t, \tau); 0 \leq t \leq 1, \tau = 0; t = 1, 0 \leq \tau \leq 1\}$ dans $C^{(k),\mu}(\bar\Omega)$ continue avec $\partial u/\partial t$ pour $0 \leq t \leq 1$,

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

$\tau = 0$ et telle que

(1.3 a) $$\frac{\partial^l u(t,\tau)}{\partial n^l} = tg_l \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

(1.3 b) $$u(t,\tau) - tu_0 \in \overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\bar\Omega),$$

(1.4 a) $$\sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, D_j u(t,\tau), t)) +$$

$$+ (1-\tau) \sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (b_i(x, D^j u(t,\tau), t)) = t \sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i f_i \quad \text{dans } \Omega,$$

(1.4 b) $$\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i \varphi a_i(x, D^j u(t,\tau), t)\, dx +$$

$$+ (1-\tau) \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i \varphi b_i(x, D^j u(t,\tau), t)\, dx = t \int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i \varphi f_i\, dx \quad \text{pour } \varphi \text{ de } \mathfrak{D}(\Omega).$$

On suppose $a_i(x, D^j u, 1) = a_i(x, D^j u)$, $a_i(x, 0, 0) = b_i(x, 0, 0) = 0$ et $\frac{\partial b_i}{\partial D^j u} = 0$ pour $|j| = k$.

La fonction $\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t} = w$ résout pour $\tau = 0$ le problème linéaire

(1.5) $$\sum_{|i|,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij}(x, D^\alpha u(t,\tau), t) D^j w) +$$

$$+ \sum_{|i|,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (b_{ij}(x, D^\alpha u(t,\tau), t) D^j w) = \sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i f_i -$$

$$- \sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i \left(\frac{\partial a_i}{\partial t}(x, D^\alpha u(t,\tau), t)\right) - \sum_{|i|\leq k} (-1)^{|i|} D^i \left(\frac{\partial b_i}{\partial t}(x, D^\alpha u(t,\tau), t)\right)$$

dans Ω,

(1.6) $$\frac{\partial^l w}{\partial n^l} = g_l \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où on désigne $\frac{\partial a_i}{\partial D^j u} = a_{ij}$, $\frac{\partial b_i}{\partial D^j u} = b_{ij}$.

Désignons par $w = N(u, t, f_i, u_0)$ l'application associant la solution w de (1.5), (1.6) à u, t, f_i, u_0, dont l'existence on suppose, cf. plus loin. Le problème (1.3), (1.4) équivaut pour $\tau = 0$ au problème de Cauchy:

(1.7) $$\frac{\partial u(t,\tau)}{\partial t} = N(u(t), t, f_i, u_0), \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 1,\ u(0,0) = 0.$$

Soit $F(s)$ une fonction positive, continue et non décroissante telle que pour les solutions eventuelles de (1.7) dans $(0, \varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$

(1.8) $$\left\| \frac{\partial u(t,0)}{\partial t} \right\|_{k,\mu} \leq F(\|u\|_{k,\mu}).$$

Résultats: (cf. la formulation plus précise loin):

(i) $\int_0^\infty \frac{ds}{F(s)} > \varepsilon$ entraîne l'existence d'une solution de (1.7) et donc de (1.3), (1.4) pour $\tau = 0$ et $0 \leq t \leq \varepsilon$.

(ii) Si une estimation « à priori » $\| u(t, 0) \|_{k,\mu} \leq$ const est connue, il existe une solution de (1.3), (1.4) pour $\tau = 0$ et $0 \leq t \leq 1$.

(iii) Si une estimation « à priori » $\| u(t, \tau) \|_{k,\mu} \leq c(r)$ est connue, f_i étant dans une boule du rayon r, u_0 fixe, alors il existe une solution de (1.3), (1.4) sur toute la courbe M, spécialement pour $t = \tau = 1$.

Au point (iii), on utilise la notion du degré de Leray–Schauder et on obtient les résultats proches aux résultats du travail de F. E. Browder [2].

On utilise des estimations pour les opérateurs linéaires essentiellement. On s'appuye sur les résultats du travail de J. Kadlec, J. Nečas [5], qui est une généralisation des résultats du travail de S. Campanato [3] (où on s'occupe des équations du deuxième ordre) pour les opérateurs elliptiques d'ordre $2k$. Cette généralisation est presque immédiate pour le problème de Dirichlet en question.

2. SUR L'APPLICATION $\mathrm{N}(u, t, f_i, u_0)$. – Supposons les fonctions $a_i(x, \zeta_j, t)$ continues et une fois continûment différentiables en ζ_j, t pour $x \in \bar{\Omega}$, $-\infty < \zeta_j < \infty$, $0 \leq t \leq 1$. Notons $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial \zeta_j}$ et supposons

$$\text{(2.1)} \qquad | a_{ij}(x, \zeta_\alpha, t) - a_{ij}(y, \eta_\alpha, t) | \leq c_1 \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha | + | \eta_\alpha |) \Big) \cdot \Big(| x - y |^\mu + \sum_{|\alpha| \leq k} | \zeta_\alpha - \eta_\alpha | \Big),$$

$$\text{(2.2)} \qquad \left| \frac{\partial a_i}{\partial t}(x, \zeta_\alpha, t) - \frac{\partial a_i}{\partial t}(y, \eta_\alpha, t) \right| \leq c_1 \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha | + | \eta_\alpha |) \Big) \cdot \Big(| x - y |^\mu + \sum_{|\alpha| \leq k} | \zeta_\alpha - \eta_\alpha | \Big),$$

$$\text{(2.3)} \qquad | a_{ij}(x, \zeta_\alpha, t_1) - a_{ij}(y, \eta_\alpha, t_1) - a_{ij}(x, \zeta_\alpha, t_2) + a_{ij}(y, \eta_\alpha, t_2) | \leq$$
$$\leq c_1 \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha | + | \eta_\alpha |) \Big) \Big(| x - y |^\mu + \sum_{|\alpha| \leq k} | \zeta_\alpha - \eta_\alpha | \Big) \omega(| t_2 - t_1 |),$$

$$\text{(2.4)} \qquad \left| \frac{\partial a_i}{\partial t}(x, \zeta_\alpha, t_1) - \Big(\frac{\partial a_i}{\partial t}(y, \eta_\alpha, t_1) - \frac{\partial a_i}{\partial t}(x, \zeta_\alpha, t_2) + \frac{\partial a_i}{\partial t}(y, \eta_\alpha, t_2) \right| \leq$$
$$\leq c_1 \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha | + | \eta_\alpha |) \Big) \Big(| x - y |^\mu + \sum_{|\alpha| \leq k} | \zeta_\alpha - \eta_\alpha | \Big) \omega(| t_2 - t_1 |),$$

$$\text{(2.5)} \qquad | a_{ij}(x, \zeta_\alpha, t) - a_{ij}(x, \eta_\alpha, t) - a_{ij}(y, \nu_\alpha, t) + a_{ij}(y, \mu_\alpha, t) | \leq$$
$$\leq c_1 \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha | + | \eta_\alpha | + | \nu_\alpha | + | \mu_\alpha |) \Big) \Big\{ | x - y |^\mu \sum_{|\alpha| \leq k} (| \zeta_\alpha - \eta_\alpha | + | \nu_\alpha - \mu_\alpha |) +$$
$$+ \sum_{|\alpha| \leq k} | \zeta_\alpha - \eta_\alpha - \nu_\alpha + \mu_\alpha | + \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} (| \zeta_\alpha - \nu_\alpha | + | \eta_\alpha - \mu_\alpha |) \cdot$$
$$\cdot (| \zeta_\beta - \eta_\beta | + | \nu_\beta - \mu_\beta |) \Big\},$$

(2.6) l'inégalité (2.5) pour $\partial a_i / \partial t$.

Ici $c_1(s)$ est une fonction continue et positive pour $0 \leq s < \infty$ et $\omega(s)$ une fonction continue et non-négative pour $0 \leq s < \infty$, $\omega(0) = 0$.

Supposons encore que pour ζ_j réels on a

$$c_2\Big(\sum_{|\alpha|\leq k}|\eta_\alpha|\Big)\sum_{|\alpha|\leq k}\zeta_\alpha^2 \leq \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x\,,\eta_\alpha\,,t)\,\zeta_i\,\zeta_j\,, \tag{2.7}$$

où $c_2(s)$ est une fonction continue et positive pour $0 \leq s < \infty$.

Les hypothèses pour les coefficients b_i soient les mêmes, sauf (2.7). Rappelons que $\partial b_i/\partial\zeta_j = 0$ pour $|j| = k$.

On désigne encore par $W_2^{(k)}(\Omega)$ l'éspace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont de carré sommable sur Ω muni du produit scalaire $\int\limits_\Omega \sum\limits_{|i|\leq k} D^i v D^j u dx$ et par $\overset{0}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $\mathfrak{D}(\Omega)$ par rapport à la norme de $\overset{0}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$.

Soit $\|u\|_{k,\mu} < R \leq \infty$ (on dira dans la suite R de (2.8)) et supposons: si $w \in \overset{0}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ et si pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \sum_{|i|,|j|\leq k} a_{ij}(x\,,D^\alpha u\,,t)\,D^i\varphi D^j w dx + \tag{2.8}$$

$$+\int\limits_\Omega \sum_{|i|,|j|\leq k} b_{ij}(x\,,D^\alpha u\,,t)\,D^i\varphi D^j w dx = 0, \qquad \text{alors} \quad w \equiv 0\,.$$

Il suit des hypothèses (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) et des estimations pour les opérateurs linéaires, cf. J. Nečas [7], chapitre 3 et 5 et J. Kadlec, J.Nečas [5] (cf. aussi le travail [1]; on peut l'appliquer immédiatement pour $N \geq 3$): si $\|u\|_{k,\mu} < R$, il existe un élément unique $\omega \in C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\omega - v_0 \in \overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\overline{\Omega}) \tag{2.9}$$

et tel que pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \sum_{|i|,|j|\leq k} a_{ij}(x\,,D^\alpha u\,,t)\,D^i\varphi D^j\omega dx + \tag{2.10}$$

$$+\int\limits_\Omega \sum_{|i|,|j|\leq k} b_{ij}(x\,,D^\alpha u\,,t)\,D^i\varphi D^j\omega\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i\varphi g_i\, dx\,,$$

où $g_i \in C^{(0),\mu}(\overline{\Omega})$, $v_0 \in C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$.

En effet, premièrement, d'après les résultats bien connus, cf. par exemple le travail [7]: pour chaque u de $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ avec $\|u\|_{k,\mu} < R$, il suit de l'hypothèse (2.7), (2.8) l'existence d'un élément unique ω de $W_2^{(k)}(\Omega)$ tel que $\omega - v_0 \in \overset{0}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)$ et tel que (2.10) est satisfaite; de plus on a l'inégalité

$$\|\omega\|_{W_2^{(k)}} \leq c_3\Big(\|v_0\|_{W_2^{(k)}} + \sum_{|i|\leq k}\|g_i\|_{L_2}\Big)\,. \tag{2.11}$$

Ici c_3 dépend de u et t. Mais il suffiit de suivre les raisonements de la démonstration du lemme 1.4, chapitre 5 du livre [7] pour voir que

$$\| \omega \|_{W_2^{(k)}} \leq c_3 (\| u \|_{k,\mu}) \Big(\| v_0 \|_{W_2^{(k)}} + \sum_{|i| \leq k} \| g_i \|_{L_2} \Big), \tag{2.12}$$

ou $c_3(s)$ est une fonction continue et positive pour $0 \leq s < \infty$.

Nous obtenons comme une conséquence immédiate du travail [5] et des hypothèses (2.1), (2.7) et de (2.12) l'intégalité:

$$\| \omega \|_{k,\mu} \leq c_4 (\| u \|_{k,\mu}, \mu) \Big(\| v_0 \|_{k,\mu} + \sum_{|i| \leq k} \| g_i \|_{k,\mu} \Big), \tag{2.13}$$

ou $c_4(s, \mu)$ est une fonction continue et positive pour $0 \leq s < \infty \times 0 < \mu < 1$. Il s'ensuit qu'il existe une solution unique dans $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$, soit w, du problème

$$w - u_0 \in C^{(k),\mu}(\overline{\Omega}), \tag{2.14}$$

pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} a_{ij}(x, D^\alpha u, t) D^i \varphi D^j w dx + \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq k} b_{ij}(x, D^\alpha u, t) D^i \varphi D^i w dx = \tag{2.15}$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} D^i \varphi f_i dx - \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} \left[\frac{\partial a_i}{\partial t}(x, D^\alpha u, t) + \frac{\partial b_i}{\partial t}(x, D^\alpha u, t) \right] D^i \varphi dx.$$

Désignons comme dans l'introduction par $w = N(u, t, f_i, u_0)$. Il suit maintenant de (2.1)–(2.6) et de (2.13) facilement

LEMME 2.1. – *Soir* $\rho_1 < R$, $\| u_l \|_{k,\mu} \leq \rho_1$, $l = 1, 2$, $0 \leq t \leq 1$, $\| f_i \|_{0,\mu} \leq \leq \rho_2 < \infty$, $\| u_0 \|_{k,\mu} \leq \rho_2$, $w_1 = N(u_l, t, f_i, u_0)$. *Alors*

(i) $\| w_1 - w_2 \|_{k,\mu} \leq c_5(\rho_1, \rho_2) \| u_l - u_2 \|_{k,\mu}$;

(ii) *l'application* $N(u, t, f_i, u_0)$ *est continue comme l'application* $f_i, u_0 \to w$, *uniformément par rapport* $\| u \|_{k,\mu} \leq \rho_1$ *et* $0 \leq t \leq 1$;

(iii) *l'application* $N(u, t, f_i, u_0)$ *est continue comme l'application* $u, t \to w$; *ici* $c_5(\rho_1, \rho_2)$ *est une fonction continue et positive pour* $0 \leq \rho_1 < \infty \times \times 0 \leq \rho_2 < \infty$.

3. L'EXISTENCE DE LA SOLUTION $u(t, 0)$. – Une fonction $u(t, 0)$ étant une solution faible appartenent à $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ du problème (1.3), (1.4) pour $0 \leq t < \varepsilon \leq 1$, telle que $\| u(t, 0) \|_{k,\mu} < R$ et telle que $\frac{du}{dt}(t, 0)$ est une application continue, on a $\frac{du}{dt} = N(u(t), t, f_i, u_0)$, $u(0, 0) = 0$ ce qui équvaut à

$$u(t, 0) = \int_0^t N(u(s), s, f_i, u_0) ds \tag{3.1}$$

et réciproquement: si une application continue $u(t, 0)$ de $(0, \varepsilon)$ dans $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ satisfait à (3.1), elle est aussi une solution du problème (1.3), (1.4).

En utilisant le théorème connu et facile sur l'éxistence d'un point fixe unique d'une contraction, on obtient:

(3.2 a) il existe un tel $\varepsilon > 0$,

(3.2 b): si $u(t, 0)$ est une solution mentionnée dans l'intervalle $0 \leq t \leq \varepsilon < 1$ et $\| u(t, 0)\|_{k,\mu} < R$, il existe un prolongement de cette solution sur un intervalle $0 \leq t < \varepsilon_1$, $1 \geq \varepsilon_1 > \varepsilon$.

On voit facilement l'unicité de la solution de (3.1) dans l'intervalle d'existece de cette solution.

Soit maintenant $u(t, 0)$ la solution en question dans l'intervalle $0 \leq t < < \varepsilon \leq 1$ et $F(s)$ une fonction continue, non-décroissante et positive, définie pour $0 \leq s < \infty$, telle que

$$\| N(u(t), t, f_i, u_0) \| \leq F(\| u(t) \|_{k,\mu}). \tag{3.3}$$

On désigne par $y(t)$ la solution du problème de Cauchy $y'(t) = F(y(t))$, $y(0) = 0$. Nous obtenons:

LEMME 3.1. – *Les hypothèses* (2.1)–(2.8) *soient satisfaites. Soit* R *de* (2.8) *égal à l'infini et* F *de* (3.3). *Alors la solution* $u(t, 0)$ *du problème* (3.1) *se prolonge sur l'intervalle* $0 \leq t \leq \varepsilon \leq 1$ *si* $\varepsilon < \int_0^\infty \frac{ds}{F(s)}$. *Si une estimation « à priori »*

$$\| u(t, 0)\|_{k,\mu} \leq \rho < R \tag{3.4}$$

est connue, la solution se prolonge sur tout l'intervalle $0 \leq t \leq 1$ (1).

En effet, on obtient pour le premier cas et pour t, où la fonction $\| u(t, 0)\|_{k,\mu}$ est définie: $\| u(t, 0)\|_{k,\mu} \leq y(t)$. Soit $u(t, 0)$ définie sur l'intervalle $0 \leq t < \varepsilon$ et $y(t)$ sur l'intervalle $0 \leq t \leq \varepsilon$. Pour t_1, t_2 on a $\| u(t_1, 0) - u(t_2, 0)\|_{k,\mu} \leq$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \| N(u(\tau), \tau, f_i, u_0)\| \, d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} F(\| u(\tau)\|_{k,\mu}) \, d\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} F(y(\tau)) \, d\tau \to 0 \quad \text{pour}$$

$t_1, t_2 \to \varepsilon - 0$, donc il existe $\lim\limits_{t \to \varepsilon - 0} u(t, 0) = u(\varepsilon, 0)$ dans $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$. Alors $u(t, 0)$ se prolonge sur l'intervalle $0 \leq t \leq \varepsilon$. Par les prolongements succesifs, on obtient l'assertion.

Si (3.4) est vrai, on démontre de la même manière qu'on peut prolonger $u(t, 0)$ sur tout l'intervalle $0 \leq t \leq 1$.

Nous obtenons alors facilement:

THÉORÈME 1. – *On suppose* (2.1)–(2.8), $b_i \equiv 0$, $f_i \in C^{(0),\mu}(\overline{\Omega})$, $u_0 \in C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$. *Soit* $R = \infty$ *de* (2.8) *et* $F(s)$ *une fonction satisfaisant* (3.3). *Alors il existe une solution faible de* $C^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$ *du problème* (1.1 b), (1.2 b) *si*

$$\int_0^\infty \frac{ds}{F(s)} > 1. \tag{3.5}$$

(1) On peut démontrer que $F(s) \leq c_1 + c_2 s$ si une estimation $\| u'(t) \|_{k,0} < c$ est connue. Cela découle d'une estimation du travail [5].

Si la condition (3.5) *est satisfaite uniformement pour un voisinage de* f_i, u_0, *la solution* u *construite audessus dépend continûment des données dans ce voisinage.*

En effet, la dernière partie du théorème suit d'un théorème bien connu sur la contraction dépendant du paramètre et du point (ii) du lemme 2.1.

THÉORÈME 2. – *On suppose* (2.1)–(2.8), $b_i \equiv 0$, $f_i \in C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})$, $u_0 \in C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$, $R = \infty$ *de* (2.8) *et l'existence d'une fonction* $F(s)$ *satisfaisant* (3.3). *Alors il existe une solution faible de* $C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$ *du problème* (1.3 b), (1.4 b) *pour* $0 \leq t \leq \varepsilon$ *si* $\varepsilon < \int\limits_0^\infty \frac{ds}{F(s)}$.

THÉORÈME 3. – *On suppose* (2.1)–(2.8), $b_i \equiv 0$, $f_i \in C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})$, $u_0 \in C^{(k),\mu}(\bar{\Omega})$, *une estimation « à priori » pour la solution de* (1.3 b), (1.4 b): $\|u(t, 0)\|_{k,\mu} \leq \rho < R$. *Alors il existe une solution du problème* (1.1), (1.2).

Remarque 3.1. – Si l'estimation $\|u(t, 0)\|_{k,\mu} \leq \rho$ est connue pour un voisinage de f_i, u_0, on a la dépendance continue des données de la solution construite.

4. L'APPLICATION DU DEGRÉ TOPOLOGIQUE. – Supposons maintenant $b_i(x, \zeta_j, t) \not\equiv 0$. Soit $a > 0$ et $\|F_i\|_{0,\mu} < a$, $|i| \leq k$, u_0 fixe et $R(a)$ la constante de (2.8) correspondant à F_i, u_0. Supposons l'existence d'une fonction continue et positive $\rho(a)$ telle que

$$\rho(a) < R(a) \tag{4.1}$$

et d'une estimation « à priori »

$$\|u(t, 0)\|_{k,\mu} \leq \rho(a) \text{ [2]}. \tag{4.2}$$

Pour f_i, u_0 en question, fixes, supposons une estimation « à priori »

$$\|u(1, \tau)\|_{k,\mu} \leq r. \tag{4.3}$$

En vertu du théorème 3, utilisé pour le paramètre $\tau = 0$ et F_i et en vertu de la remarque 3.1, l'application $F_i \to u(1, 0)$ est une application continue de $[C^{(0),\mu}(\bar{\Omega})]^1$ dans $C^{(k),\eta}(\bar{\Omega})$, où $\varkappa$ est le nombre des indices $|i| \leq k$. Notons cette application: $A(F_\iota) = u(1, 0)$ et considérons l'application

$$u_0 - A(f_i - \tau b_i(x, D^j u_0 + D^j v, 1)) \text{ de } \langle 0, 1\rangle \times \overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\bar{\Omega}) \text{ dans } \overset{0}{C}{}^{(k),\mu}(\bar{\Omega}). \tag{4.4}$$

Pour fixer les idées, soit aussi

$$\|u_0\|_{k,\mu} \leq r \tag{4.5}$$

et considérons (4.4) dans la boule $B_{3r} = \{\|v\|_{k,\mu} \leq 3r\}$; (4.4) est une homotopie des applications compactes. Considérons enfin l'application $(u_0 + v)$ —

(2) Pour le moment, on cherche une solution pour $\tau = 0$; on peut remplacer (4.2) par d'autres conditions formulées aux théorèmes précédents.

$-\mathrm{A}(f_i - \tau b_i(x, \mathrm{D}^j u_0 + \mathrm{D}v, 1))$; cette application est en vertu de (4.3), (4.5) différente de zéro sur la sphère $\|v\|_{k,\mu} = 3r$. Le degré (cf. J. Cronin [4]) de cette application par rapport à l'origine et à la boule $\|v\|_{k,\mu} \leq 3r$ est: $d[(u_0 + v) - \mathrm{A}(f_i - \tau b_i(x, \mathrm{D}^j u_0 + \mathrm{D}^j v, 1)), \mathrm{B}_{3r}, 0] = d[(u_0 + v) - \mathrm{A}(f_i), \mathrm{B}_{3r}, 0] = 1$, alors on a:

THÉORÈME 4. – *Supposons* (2.1)-(2.8) $f_i \in \mathrm{C}^{(0),\mu}(\overline{\Omega})$, $u_0 \in \mathrm{C}^{(k),\mu}(\overline{\Omega})$, (4.1)-(4.3). *Alors il existe une solution du problème* (1.3 b), (1.4 b).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGMON S., DOUGLIS A. et NIRENBERG L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*. I, « Comm. Pure. Appl. Math. », *12*, 623–727 (1959).

[2] BROWDER F. E., *Topological methods for elliptic equations of arbitrary order*, « Pacific. J. Math. », *17*, num. 1 (1966).

[3] CAMPANATO S., *Equazioni ellittiche del II ordine e spazi* $\mathfrak{L}^{(2,\lambda)}$, « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, tomo LXIX, 321–381 (1965).

[4] CRONIN J., *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, « Amer. Math. Soc. », (1964).

[5] KADLEC J. et NEČAS J., à paraître dans « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (1966).

[6] NEČAS J., *Sur une méthode générale pour la solution des problèmes aux limites non linéaires*, « Annali Scuola Norm. Sup. Pisa », vol. XX, fasc. IV, 655–674 (1967).

[7] NEČAS J., *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Prague (1967).