Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Livio Piccinini

Su alcune diseguaglianze di interpolazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.3, p. 341–346.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_3_341_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Su alcune diseguaglianze di interpolazione.* Nota di LIVIO PICCININI (*), presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

SUMMARY. — The author provides a theorem on certain interpolation inequalities, which generalises previous results obtained by Gagliardo [3], Nirenberg [7], [8], Miranda [6], Stampacchia [10].

1. Consideriamo qui funzioni misurabili a valori reali definite su un cubo Q_0 di R^n. Indichiamo con Q un qualunque cubo con i lati paralleli a quelli di Q_0 e con $|Q|$ la misura di Q.

Ricordiamo che una funzione appartiene allo spazio di Morrey $L^{p,\lambda}(Q_0)$ con $p \geq 1$, $0 \leq \lambda \leq n$, se esiste una costante $K = K(u)$ tale che, per ogni $Q \subset Q_0$, risulti

$$\int_Q |u|^p \, dx \leq K^p |Q|^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Una norma in $L^{p,\lambda}$ è data da

$$\| u \|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{Q \subset Q_0} \left\{ \int_Q |u|^p \, dx \cdot |Q|^{\frac{\lambda}{n}-1} \right\}^{1/p}. \tag{1.1}$$

È ovvio che $L^{p,n} = L^p$ e che $L^{p,0} = L^\infty$.

Ricordiamo che una funzione u appartiene allo spazio $\mathcal{L}^{p,\lambda}(Q_0)$, con $p \geq 1$, $-p \leq \lambda \leq n$, se esiste una costante $K = K(u)$ tale che, per ogni $Q \subset Q_0$, risulti

$$\inf_{c \in R} \int_Q |u - c|^p \, dx \leq K^p |Q|^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Una seminorma in $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ è data da

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = \sup_{Q \subset Q_0} \left\{ \left(\inf_{c \in R} \int_Q |u - c|^p \, dx \right) \cdot |Q|^{\frac{\lambda}{n}-1} \right\}^{1/p}. \tag{1.2}$$

Una norma è data da $\| u \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} = [u]_{\mathcal{L}^{p,\lambda}} + \|u\|_{L^p}$.

È noto che:

(i) $\mathcal{L}^{p,\lambda} \subset \mathcal{L}^{q,\mu}$ se $\frac{\lambda}{p} \leq \frac{\mu}{q}$ e $1 \leq q \leq p$.

(ii) (Campanato [1] e Meyers [5]),

(*) Perfezionando presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 marzo 1967.

Se $\lambda < 0$, allora $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$ è isomorfo allo spazio $C_{0,-\frac{\lambda}{p}}$ delle funzioni hölderiane con esponente di Hölder $\alpha = -\frac{\lambda}{p}$. La seminorma in $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$ è equivalente alla seminorma

$$[u]_{C_{0,\alpha}} = \sup_{x',x'' \in Q_0} \frac{|u(x') - u(x'')|}{|x' - x''|^{\alpha}}.$$

Quindi per $\lambda < 0$ gli spazi $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$ dipendono solo dal rapporto λ/p.

(iii) Gli spazi $\mathfrak{L}^{p,0}$ al variare di p sono tutti isomorfi ad uno stesso spazio $\mathcal{E}_0$, caratterizzato da John e Nirenberg ([4], teorema I).

Porremo $\| u \|_{M^p} = \inf \left\{ K > 0 \,|\, \mathrm{mis}\{x \in Q_0 \,|\, |u(x)| > \sigma\} < \left(\frac{K}{\sigma}\right)^p \text{ per } \forall \sigma > 0 \right\}$.
Se risulta $\| u \|_{M^p} < \infty$ diciamo che $u \in L^p_{\mathrm{deb}} \equiv M^p$.

Una funzione u appartiene allo spazio $\mathfrak{L}^{p,\lambda}_{\mathrm{deb}}$, con $p \geq 1$, $-p \leq \lambda \leq n$, se:

$$(1.3) \qquad [u]_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}_{\mathrm{deb}}} = \sup_{Q \subset Q_0} \{ (\inf_{c \in R} \| u - c \|^p_{M^p}) \cdot |Q|^{\frac{\lambda}{n} - 1} \} < + \infty ;$$

il primo membro è una seminorma su $\mathfrak{L}^{p,\lambda}_{\mathrm{deb}}$.

È evidente che se $u \in \mathfrak{L}^{p,\lambda}_{\mathrm{deb}}$ e $1 \leq q \leq p$, $\frac{\lambda}{p} \leq \frac{\mu}{q}$, allora $u \in \mathfrak{L}^{q,\mu}$.

Scopo della Nota è dimostrare il seguente

TEOREMA I. – *Sia u una funzione di $\mathfrak{L}^{q,\mu}$ tale che $D^2 u \in L^{r,\nu}$. Sia T_α il dominio di R^2 definito dalle seguenti limitazioni*

$$(1.4) \qquad \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{\alpha}{r} \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1 - \alpha}{q} \\ \nu x + \mu y \geq 1 - 2\alpha + \alpha \dfrac{\nu}{r} + (1 - \alpha) \dfrac{\mu}{q} . \end{cases}$$

Sia α un numero reale tale che T_α non è vuoto (1); *sia*

$$\frac{1}{p} = \min_{(x,y) \in T_\alpha} (x + y).$$

Posto $\vartheta = 1 - 2\alpha + \alpha \frac{\nu}{r} + (1 - \alpha) \frac{\mu}{q}$, osserviamo che $1/p = 0$ se e solo se $\vartheta \leq 0$ (si noti che $\vartheta \geq -1$).

Allora valgono le maggiorazioni seguenti:

(i) *Se $1/p = 0$, si ha*

$$(1.5) \qquad [Du]_{C_{0,-\vartheta}} = [Du]_{\mathfrak{L}^{1,\vartheta}} \leq c_1 \| D^2 u \|^{\alpha}_{L^{r,\nu}} [u]^{1-\alpha}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}} .$$

(1) I valori di α che soddisfano questa condizione sono i seguenti: se $\mu > 0$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$; se $\mu \leq 0$, posto $\beta = -\frac{\mu}{q}$, $\frac{1 - \beta}{2 - \beta} \leq \alpha \leq 1$.

(ii) *Se* $1/p > 0$, *si ha*

$$[Du]_{\mathfrak{L}_{\mathrm{deb}}^{p,\lambda}} \leq c^2 \| D^2 u \|_{L^{r,\nu}}^{\alpha} [u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}}^{1-\alpha} \tag{1.6}$$

con $\lambda = p\vartheta$, *dove* c_1, c_2 *sono due costanti positive che dipendono da* $n, \alpha, r, \nu, q, \mu$.

Questo teorema costituisce una generalizzazione dei risultati ottenuti da Nirenberg [4] e da Gagliardo [3]; da Nirenberg [8] e da C. Miranda [6]; da Stampacchia [10].

La formulazione corrispondente a quella di Nirenberg–Gagliardo si ha ponendo $\mu = \nu = n$. La formulazione corrispondente a quella di Nirenberg [8] e di Miranda si ha ponendo $\nu = n$, $\mu < 0$. Il risultato di Stampacchia si ottiene ponendo $\alpha = 1$.

Si noti che se $\mu = \nu = n$ si può dare una dimostrazione che porta alla (1.6) nella forma

$$[Du]_{\mathfrak{L}^{p,\lambda}} \leq c \| D^2 u \|_{L^{r,\nu}}^{\alpha} [u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}}^{1-\alpha}.$$

2. Per la dimostrazione del teorema servono due lemmi che si dimostrano con un procedimento simile a quello usato da Nirenberg in [7] e [8].

LEMMA 1. – *Sia* $u \in L^1(Q_0)$; *sia* $D^2 u \in L^r$, *con* $r \geq 1$. *Allora per ogni polinomio* P *di grado* ≤ 1, *per ogni cubo* $Q \subset Q_0$ *e per tutti gli* α *tali che* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ *vale la maggiorazione*

(2.1) (2)
$$\int_Q |Du - (Du)_Q| \, dx \leq k \left(\int_Q |D^2 u|^r dx \right)^{\alpha/r} \cdot \left(\int_Q |u - P| \, dx \right)^{1-\alpha} |Q|^{\frac{2\alpha - 1}{n} + \alpha\left(1 - \frac{1}{r}\right)},$$

dove k *è una costante positiva che non dipende da* u *e da* Q.

LEMMA 2. – *Sia* $u \in \mathfrak{L}^{q,\mu}(Q_0)$, $\mu \leq 0$, $D^2 u \in \mathfrak{L}^r(Q_0)$, *con* $r \geq 1$. *Allora, posto* $\beta = -\frac{\mu}{q}$, *vale la maggiorazione seguente*

$$\int_Q |Du - (Du)_Q| \, dx \leq k \left(\int_Q |D^2 u|^r dx \right)^{\alpha/r} [u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}(Q)}^{1-\alpha} \cdot |Q|^{(1-\alpha)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right) + \frac{2\alpha - 1}{n} + \alpha\left(1 - \frac{1}{r}\right)} \tag{2.2}$$

per tutti gli α *tali che* $\frac{1-\beta}{2-\beta} \leq \alpha \leq 1$ *e per tutti i* $Q \subset Q_0$, *dove* k *è una costante positiva che non dipende da* u *e da* Q.

Sia $\mathcal{S}$ la famiglia dei sistemi S consistenti di un numero finito di sottocubi Q_i a due a due disgiunti, aventi i lati paralleli a quelli di Q_0. Per ogni

(2) Con $(Du)_Q$ si indica $\frac{1}{|Q|} \int_Q Du \, dx$.

funzione $u \in L^1(Q_0)$ e per ogni $p > 1$ si ponga

$$[u]_{N^p} = \sup_{S \in \mathfrak{S}} \left\{ \sum_{Q_i \in S} \left(\int_{Q_i} |u - u_{Q_i}|\, dx \right)^p |Q_i|^{1-p} \right\}. \tag{2.3}$$

Diciamo che $u \in N^p$ se $[u]_{N^p} < \infty$; $[u]_{N^p}$ definisce una seminorma in N^p. È noto il seguente teorema (John e Nirenberg [4]):

Se u appartiene a N^p *con* $p > 1$, *allora* $(u - u_{Q_0}) \in M^p$ *e* $\| u - u_{Q_0} \|_{M^p} \leq \leq A\, [u]_{N^p}$, *dove* A *è una costante che dipende da* n *e da* p.

Dimostrazione del teorema 1.

I) Sia $\mu > 0$.

Sia data una partizione S di Q. Siano x e y due numeri reali tali che

$$0 \leq x \leq \frac{\alpha}{r} \quad , \quad 0 \leq y \leq \frac{1-\alpha}{q}.$$

Allora per ogni cubo Q_i di S si ricava dalla (2.1) la maggiorazione

$$\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}|\, dx \leq k \left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r dx \right)^x \left(\int_{Q_i} |u - P_i|^q dx \right)^y \cdot \tag{2.4 (3)}$$

$$\cdot \left(\int_{Q_i} |D^2 u|\, dx \right)^{\frac{\alpha}{r} - x} \left(\int_{Q_i} |u - P_i|^q dx \right)^{\frac{1-\alpha}{q} - y} \cdot |Q_i|^{\frac{2\alpha - 1}{n} + 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{1-\alpha}{q}},$$

da cui, tenuto conto della (1.1) e della (1.2) si ha

$$\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}|\, dx \leq k \left(\int_{Q_i} |Du|^r dx \right)^x \left(\int_{Q_i} |u - P_i|^q dx \right)^y \cdot \tag{2.5}$$

$$\cdot \| D^2 u \|_{L^{r,\nu}}^{\alpha - rx} [u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}}^{(1-\alpha) - qy} \cdot |Q_i|^z \cdot |Q_i|^{1 - \frac{1-2\alpha}{n} - x - y - z + x\frac{\nu}{n} + y\frac{\mu}{n} - \frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r} - \frac{(1-\alpha)}{n}\frac{\mu}{q}}$$

dove z è un numero reale che soddisfa la relazione

$$0 \leq z \leq 1 - \frac{1 - 2\alpha}{n} - x - y + x\frac{\nu}{n} + y\frac{\mu}{n} - \frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r} - \frac{1-\alpha}{n}\frac{\mu}{q}.$$

Dalla (2.5) si ottiene

$$\sum_i |Q_i|^{1-p} \left(\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}|\, dx \right)^p \leq k \sum_i \left(\left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r dx \right)^{px} \cdot \right. \tag{2.6}$$

$$\left. \cdot \left(\int_{Q_i} |u - P_i|^q dx \right)^{py} |Q_i|^{pz} \right) \| D^2 u \|_{L^{r,\nu}}^{(\alpha - rx)p} \cdot$$

$$\cdot [u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}}^{((1-\alpha) - qy)p} |Q|^{1 - \left[\frac{1-2\alpha}{n} + x + y + z + \frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r} + \frac{1-\alpha}{n}\frac{\mu}{q} - x\frac{\nu}{n} - y\frac{\mu}{n}\right] p}.$$

(3) Con P_i si denota il polinomio di grado ≤ 1 che rende minimo $\int_{Q_i} |u - P_i|^q dx$.

Imponendo che $x + y + z = 1/p$ ed applicando la diseguaglianza di Hölder alla somma a secondo membro, si ottiene, tenuto conto del fatto che

$$\int_{Q_i} |u - P_i|^q \, dx \leq \int |u - P_0|^q \, dx,$$

$$[Du]_{N^p} \leq k \| D^2 u \|^{\alpha}_{L^{r,\nu}} [u]^{1-\alpha}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}} |Q|^{\frac{1}{p} - \left(1-2\alpha+\alpha\frac{\nu}{r}+(1-\alpha)\frac{\mu}{q}\right)\frac{1}{n}} . \tag{2.7}$$

Le condizioni poste su x, y, z sono equivalenti alle condizioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{\alpha}{r} \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1-\alpha}{q} \\ \nu x + \mu y \geq 1 - 2\alpha + \alpha\dfrac{\nu}{r} + (1-\alpha)\dfrac{\mu}{q} \end{cases}$$

e il valore minimo di $1/p$ è $(x + y)$. Tali condizioni sono proprio quelle poste nell'enunciato del teorema. Il teorema di John e Nirenberg applicato alla (2.7) dimostra la tesi nel caso in cui $\mu > 0$.

II) Sia $\mu \leq 0$.

Si consideri un sistema di sottocubi di Q.

Sia x un numero reale tale che $0 \leq x \leq \frac{\alpha}{r}$, $\alpha \leq 1$. Allora per ogni cubo Q_i si deduce dalla (2.2) la maggiorazione seguente

$$\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}| \, dx \leq k\left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r \, dx\right)^x \left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r \, dx\right)^{\frac{\alpha}{r}-x} \cdot \tag{2.8}$$

$$[u]^{1-\alpha}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}(Q_i)} |Q_i|^{(1-\alpha)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)+\frac{2\alpha-1}{n}+\alpha\left(1-\frac{1}{r}\right)}$$

e quindi, maggiorando $[u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}(Q_i)}$ con $[u]_{\mathfrak{L}^{q,\mu}(Q)}$ si ha la

$$\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}| \, dx \leq k\left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r \, dx\right)^x \cdot \tag{2.9}$$

$$\cdot \| D^2 u \|^{\alpha - rx}_{L^{r,\nu}} [u]^{1-\alpha}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}} |Q_i|^z \cdot |Q_i|^{1+(1-\alpha)\frac{\beta}{n}+\frac{2\alpha-1}{n}-\frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r}-\left(1-\frac{\nu}{n}\right)x-z},$$

dove z è un numero reale che soddisfa la relazione

$$0 \leq z \leq 1 - \frac{1-2\alpha}{n} - x - x\frac{\nu}{n} - \frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r} + \frac{1-\alpha}{n}\beta . \tag{2.10}$$

Dalla (2.9) si ottiene

$$\sum_i |Q_i|^{1-p}\left(\int_{Q_i} |Du - (Du)_{Q_i}| \, dx\right)^p \leq k\left\{\sum_i \left(\int_{Q_i} |D^2 u|^r \, dx\right)^{px} |Q_i|^{pz}\right\} \cdot \tag{2.11}$$

$$\cdot \| D^2 u \|^{(\alpha-rx)p}_{L^{r,\nu}} \cdot [u]^{(1-\alpha)p}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}} \cdot |Q|^{1+\left[(1-\alpha)\frac{\beta}{n}+\frac{2\alpha-1}{n}-\frac{\alpha}{n}\frac{\nu}{r}-x+\frac{\nu}{n}x-z\right]p},$$

Imponendo che $x + z = 1/p$ ed applicando la diseguaglianza di Hölder alla somma a secondo membro della (2.11), si ottiene in conclusione

$$[Du]_{N^p} \leq k \| D^2 u \|^{\alpha}_{L^{r,\nu}} [u]^{1-\alpha}_{\mathfrak{L}^{q,\mu}} | Q |^{\frac{1}{p} - \left(1 - 2\alpha + \alpha \frac{\nu}{r} - (1-\alpha)\beta\right)\frac{1}{n}} \tag{2.12}$$

Le condizioni poste su x e z sono equivalenti alle condizioni seguenti

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\alpha}{r} \quad , \quad \alpha \leq 1 \\ \nu x \geq 1 - 2\alpha + \alpha \frac{\nu}{r} - (1-\alpha)\beta \end{cases} \tag{2.13}$$

e il valore minimo di $1/p$ è x.

Scegliendo per $1/p$ il minimo consentito si nota subito che esso coincide con il minimo di $1/p$ sul dominio T_α. Inoltre i valori per cui i due domini non sono vuoti sono gli stessi $\left(\frac{1-\beta}{2-\beta} \leq \alpha \leq 1\right)$.

A questo punto il teorema di John e Nirenberg permette di concludere la dimostrazione del teorema 1.

BIBLIOGRAFIA.

[1] CAMPANATO, *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *17*, 175–188 (1963).

[2] CAMPANATO, *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *18*, 137–160 (1964).

[3] GAGLIARDO, *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni di più variabili*, « Ricerche di Mat. », *8*, 24–51 (1959).

[4] JOHN–NIRENBERG, *On functions of bounded mean oscillation*, « Comm. Pure and Applied Math. », *14*, 415–426 (1961).

[5] MEYERS, *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, « Proc. Am. Math. Soc. », *14*, 717–721 (1961).

[6] MIRANDA, *Su alcuni teoremi di inclusione*, « Annales Polonici Math. », *16*, 305–315 (1965).

[7] NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations (II)*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *13*, 123–131 (1959).

[8] NIRENBERG, *An extended interpolation inequality*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *20*, 733–737 (1966).

[9] STAMPACCHIA, $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$ *space and interpolation*, « Comm. Pure and Applied Math. », *17*, 293–306 (1964).

[10] STAMPACCHIA, *The spaces* $\mathfrak{L}^{p,\lambda}$, $N^{p,\lambda}$ *and interpolation*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *19*, 443–462 (1965).