
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

**Sul potenziale elastico linearizzato di una volta
sottile**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.2, p. 202–208.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_202_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sul potenziale elastico linearizzato di una volta sottile.* Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — An invariant form of the strain-energy-function for isotropic thin shells is deduced by threedimensional theory. The author suggests some coupled flexural and extensional terms which can be neglected in the case of an insufficiently curved middle surface in the unstressed state.

In questa Nota, che si riattacca a lavori precedenti [2] e [3], si prende in speciale riguardo il caso di una volta elastica, isotropa ed omogenea, di piccolo spessore. Per un tal sistema la teoria tridimensionale suggerisce una espressione del potenziale elastico linearizzato che, oltre ad essere *invariante*, a differenza del potenziale flessionale del Love, completa i ben noti termini di pura estensione e di pura flessione con *termini di accoppiamento*, a mio avviso, altrettanto legittimi.

Questi ultimi, indipendentemente dalla linearizzazione, sono trascurabili soltanto se la superficie di riferimento (e quindi quella deformata) è di piccola curvatura (§ 4 in fine).

1. RICHIAMI E GENERALITÀ. — Si consideri un sistema continuo S , schematizzabile in una volta di spessore costante $2h$, indicando con ⁽¹⁾ C la configurazione attuale di S ; Σ la superficie mediana di C , riferita a coordinate molecolari (x^i) ($i = 1, 2$); $\{\mathbf{E}_i\}$ la base naturale localmente associata a Σ ed $\{\mathbf{E}^i\}$ la base duale: $\mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}_k = \delta^i_k$; A_{ik} e B_{ik} i coefficienti della prima e seconda forma quadratica di Σ :

$$(1) \quad A_{ik} \equiv \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_k, \quad B_{ik} \equiv \partial_i \mathbf{N} \cdot \mathbf{E}_k,$$

$\mathbf{N}$ essendo il versore della normale a Σ ; $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ le curvatures media e totale:

$$(2) \quad \mathcal{H} \equiv B_i^i = A^{ik} B_{ik}, \quad \mathcal{K} \equiv \det \| B_i^k \| = \frac{\det \| B_{ik} \|}{\det \| A_{ik} \|},$$

(A^{ik} reciproco di A_{ik} nella matrice $\| A_{ik} \|$); (x^i, z) coordinate gaussiane di C ; $\{\epsilon_\alpha\}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) la base naturale associata:

$$(3) \quad \epsilon_i \equiv \mathbf{E}_i + z B_i^k \mathbf{E}_k, \quad \epsilon_3 \equiv \mathbf{N};$$

$\{\epsilon^\alpha\}$ la base duale:

$$(3') \quad \mathfrak{D}\epsilon^i \equiv (1 + \mathcal{H}z) \mathbf{E}^i - z B_i^k \mathbf{E}^k, \quad \epsilon^3 \equiv \mathbf{N},$$

(*) Nella seduta del 12 novembre 1966.

(1) Cfr., con qualche adattamento per le notazioni, [2], p. 821.

con

$$(4) \quad \mathfrak{D} = \mathbf{I} + \mathcal{H}z + \mathcal{H}z^2;$$

$G_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta$, infine, la metrica di C:

$$(5) \quad G_{ik} \equiv A_{ik} + 2 B_{ik} z + B_{ir} B_k^r z^2, \quad G_{i3} = 0, \quad G_{33} = 1;$$

ove per i prodotti $B_{ir} B_k^r$ si ha identicamente:

$$(6) \quad B_{ir} B_k^r \equiv \mathcal{H} B_{ik} - \mathcal{H} A_{ik}.$$

La (3'), congiunta alla (6), permette di determinare la matrice reciproca di $\|G_{\alpha\beta}\|$. Si ha precisamente da $G^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^\beta$:

$$(5') \quad G^{ik} = \Gamma A^{ik} + \chi B^{ik}, \quad G^{i3} = 0, \quad G^{33} = 1,$$

ove si è posto

$$(7) \quad \begin{cases} \Gamma = \frac{1}{\mathfrak{D}^2} [\mathbf{I} + 2 \mathcal{H}z + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{K})z^2] \\ \chi = -\frac{1}{\mathfrak{D}^2} (2 + \mathcal{H}z). \end{cases}$$

Nel seguito si pensa *prefissata* una configurazione di riferimento della volta, c e si suppone che le (x^i) siano coordinate curvilinee della superficie mediana σ di c , eventualmente coordinate di curvatura. Sono inoltre indicati con lettere *minuscole* gli elementi relativi alla configurazione di riferimento; ad esempio con: $\{\mathbf{e}_i\}$ la base naturale localmente associata a σ ; a_{ik} e b_{ik} i coefficienti della prima e seconda forma quadratica di σ ; a^{ik} il reciproco di a_{ik} nella matrice $\|a_{ik}\|$, ecc.

Salvo esplicito avviso, per i tensori superficiali definiti su σ (o sulla corrispondente Σ) l'innalzamento o l'abbassamento degli indici sarà eseguito mediante il tensore fondamentale a_{ik} .

2. CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE LOCALI E GLOBALI. — Per ogni spostamento $c \rightarrow C$ della volta le *caratteristiche locali di deformazione* sono date dalle differenze

$$(8) \quad \varepsilon_{ik} \equiv \frac{G_{ik} - g_{ik}}{2}, \quad \varepsilon_{i3} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0 \quad (i, k = 1, 2),$$

funzioni, oltre che di z , dei due tensori superficiali

$$(9) \quad E_{ik} \equiv \frac{A_{ik} - a_{ik}}{2}, \quad F_{ik} \equiv B_{ik} - b_{ik}.$$

Precisamente si ha, come dalla (5) e dalla relazione analoga, valida nella configurazione di riferimento,

$$(8') \quad \varepsilon_{ik} = E_{ik} + z F_{ik} + \frac{z^2}{2} (B_{ir} A^{rs} B_{sk} - b_{ir} a^{rs} b_{sk})$$

ove A^{rs} , reciproco di $A_{rs} = a_{rs} + 2 E_{rs}$, è dato dalla formula ⁽²⁾

$$(10) \quad A^{rs} = \frac{(1 + 2 L_e) a^{rs} - 2 E^{rs}}{1 + 2 \Delta},$$

con

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta \equiv L_e + (L_e^2 - Q_e) & , \quad L_e \equiv a^{ik} E_{ik} \\ Q_e \equiv E^{ik} E_{ik} = a^{il} a^{km} E_{ik} E_{lm} . \end{cases}$$

Si noti esplicitamente che, essendo

$$(12) \quad 1 + 2 \Delta = \frac{A}{a} \quad (A = \det \| A_{ik} \|, a = \det \| a_{ik} \|),$$

il coefficiente di dilatazione superficiale su σ è dato da

$$(13) \quad \delta_\sigma = \sqrt{1 + 2 \Delta} - 1 \equiv \sqrt{1 + 2 L_e + 2 (L_e^2 - Q_e)} - 1.$$

Tenuto conto della (10) e della (9)₂, la (8') dà luogo alla seguente espressione delle caratteristiche di deformazione:

$$(14) \quad \varepsilon_{ik} = \eta_{ik} + \frac{z^2}{1 + 2 \Delta} \left[\left(\frac{1}{2} + L_e \right) F_i^r F_{kr} - \right. \\ \left. - (b_{ir} F_{ks} + b_{kr} F_{is} + F_{ir} F_{ks} - 2 \Delta b_{ir} b_{ks}) E^{rs} - (L_e^2 - Q_e) (b_i^r b_{kr} + b_i^r F_{kr} + b_k^r F_{ir}) \right],$$

ove per brevità si è indicata con η_{ik} la parte lineare in E_{ik} ed F_{ik} :

$$(15) \quad \eta_{ik} \equiv E_{ik} + z F_{ik} + z^2 \left[\frac{1}{2} (b_i^r F_{kr} + b_k^r F_{ir}) - b_i^r b_k^s E_{rs} \right].$$

Se la superficie di riferimento è piana, cioè $b_{ik} = 0$, si ha più semplicemente

$$(16) \quad \varepsilon_{ik} = E_{ik} + z F_{ik} + \frac{z^2}{1 + 2 \Delta} \left[\left(\frac{1}{2} + L_e \right) F_i^r F_{kr} - F_{ir} E^{rs} F_{sk} \right].$$

In ogni caso l'annullarsi su σ dei due tensori superficiali E_{ik} ed F_{ik} è, per una volta, equivalente alle condizioni $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0 \cdots c$; caratterizza cioè, come è naturale, gli spostamenti rigidi.

3. CARATTERISTICHE DEGLI SFORZI E POTENZIALE. - In corrispondenza alla configurazione generica C della volta, conviene considerare due tipi almeno di componenti parziali degli sforzi $\mathbf{Y}^i = \beta \varepsilon^i$ ⁽³⁾ (β omografia di tensione), e precisamente:

$$(17) \quad \tilde{Y}^{ik} \equiv \beta \varepsilon^i \cdot \varepsilon^k = \tilde{Y}^{ki} \quad ; \quad Y^{ik} \equiv \beta \varepsilon^i \cdot \mathbf{E}^k \neq Y^{ki} \quad (i, k = 1, 2).$$

(2) Nel dedurre la (10) si tien conto della identità, analoga alla (6),

$$E_{ir} E_k^r = I_{1e} E_{ik} - I_{2e} a_{ik} \quad (I_{1e} \equiv L_e = a^{ik} E_{ik}, I_{2e} = \det \| E_i^k \|),$$

e del legame tra i due invarianti quadratici di un tensore:

$$Q_e \equiv E^{ik} E_{ik} = I_{1e}^2 - 2 I_{2e}.$$

(3) Lo sforzo $\mathbf{Y}^3 = \beta \varepsilon^3$ non interviene nella teoria ordinaria delle volte.

Naturalmente, stante la (3') o la equivalente (4)

$$(3'') \quad \mathbf{E}^i = \varepsilon^i + z B^i_r \varepsilon^r,$$

sussistono i legami:

$$(18) \quad \mathfrak{D} \tilde{Y}^{ik} = (1 + z \mathfrak{M}) Y^{ik} - z B^k_r Y^{ir} \iff Y^{ik} = \tilde{Y}^{ik} + z B^k_r \tilde{Y}^{ir}.$$

Le $\tilde{Y}^{ik}$ permettono di scrivere il lavoro delle forze intime di una volta nella forma usuale (5)

$$(19) \quad \delta \mathfrak{L}^{(in.)} = \int_c \tilde{Y}^{ik} \delta \varepsilon_{ik} \frac{\mathfrak{D} \sqrt{A}}{\mathfrak{D} \sqrt{a}} dc \quad (dc = \mathfrak{D} \sqrt{a} dx^1 dx^2 dz);$$

laddove le Y^{ik} intervengono nell'espressione equivalente (cfr. [2], p. 825)

$$(19') \quad \delta \mathfrak{L}^{(in.)} = \int_{\sigma} (N^{ik} \delta E_{ik} + S^{ik} \delta F_{ik}) \sqrt{\frac{A}{a}} d\sigma \quad (d\sigma = \sqrt{a} dx^1 dx^2),$$

essendo

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} N^{ik} \equiv \int_{-h}^h \mathfrak{D} (Y^{ik} - z B^k_r Y^{ri}) dz = \int_{-h}^h \mathfrak{D} (\tilde{Y}^{ik} - z^2 B^i_r B^k_s \tilde{Y}^{rs}) dz \\ S^{ik} \equiv \frac{1}{2} \int_{-h}^h z \mathfrak{D} (Y^{ik} + Y^{ki}) dz = \int_{-h}^h z \mathfrak{D} \left[\tilde{Y}^{ik} + \frac{1}{2} z (B^i_r \tilde{Y}^{rk} + B^k_r \tilde{Y}^{ri}) dz \right]. \end{array} \right.$$

Ammettiamo ora che il sistema materiale schematizzato nella volta sia elastico (6) e che $W(\varepsilon)$ rappresenti l'energia potenziale elastica isoterma specifica acquisita nel passaggio dallo stato di equilibrio spontaneo e stabile c , allo stato attuale C . Si avrà allora

$$(21) \quad - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}} \sqrt{\frac{A}{a}} \tilde{Y}^{ik} \delta \varepsilon_{ik} = \delta W \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik}$$

nonché, confrontando le (19) e (19'),

$$(21') \quad - \sqrt{\frac{A}{a}} (N^{ik} \delta E_{ik} + S^{ik} \delta F_{ik}) = \delta \mathfrak{L} \equiv \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial E_{ik}} \delta E_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_{ik}} \delta F_{ik},$$

(4) Si noti che nelle (3) e (3'), del tipo $\varepsilon_i = \lambda^r_i \mathbf{E}_r$, $\varepsilon^i = \lambda_r^i \mathbf{E}^r$, i coefficienti λ^r_i sono i reciproci di λ_r^i nella corrispondente matrice.

(5) Qui le caratteristiche lagrangiane di tensione sono date da $\frac{\mathfrak{D} \sqrt{A}}{\mathfrak{D} \sqrt{a}} \tilde{Y}^{ik}$.

(6) Più in generale si potrebbe considerare un sistema a trasformazioni reversibili (cfr. [6]).

essendo

$$(22) \quad w(E/F) \equiv \int_{-h}^h W(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

l'energia potenziale elastica della volta riferita all'unità di area della superficie di riferimento σ .

Dal potenziale elastico tridimensionale $W(\varepsilon)$ si passa così, utilizzando la (14), al potenziale bidimensionale $w(E/F)$ con una semplice integrazione rispetto a z .

Nel caso, ad esempio, di un sistema *isotropo* in c , W è funzione delle ε_{ik} per il tramite dei due invarianti (7)

$$(23) \quad L \equiv g^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = g^{ik} \varepsilon_{ik} \quad , \quad Q \equiv \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = g^{ir} g^{ks} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{rs}$$

ove, come dalle (5') e (7) riferite a c , è

$$(24) \quad g^{ik} = \gamma a^{ik} + z x b^{ik},$$

con

$$(25) \quad \begin{cases} \gamma \equiv \frac{1}{\delta^2} [1 + 2 h z + (h^2 - k) z^2] \\ x \equiv -\frac{1}{\delta^2} (2 + h z) \quad , \quad \delta \equiv 1 + h z + k z^2, \end{cases}$$

(h e k curvature media e totale di σ). Per ricavare w basterà allora esplicitare nella (23) le ε_{ik} come dalla (14) e successivamente integrare $W \delta$ rispetto a z .

4. POTENZIALE ELASTICO LINEARIZZATO DI UNA VOLTA SOTTILE ISOTROPA E OMOGENEA. - Nel caso linearizzato le ε_{ik} vanno sostituite con le η_{ik} della (15), arrestate ai termini di 1° ordine nelle componenti di spostamento. Se in più si suppone la volta *sottile*, potranno trascurarsi i termini che contengono z ad una potenza superiore a 2. Si ha allora, con ovvio significato dei simboli,

$$(26) \quad \begin{cases} L \equiv \gamma a^{ik} \varepsilon_{ik} + z x b^{ik} \varepsilon_{ik} = \gamma [L_e + z L_f + z^2 (L_{bf} - L_{beb})] + z x (L_{be} + z L_{bf}) + \dots \\ Q \equiv (\gamma a^{ir} + z x b^{ir}) (\gamma a^{ks} + z x b^{ks}) \varepsilon_{ik} \varepsilon_{rs} = \gamma^2 \eta^{ik} \eta_{ik} + 2 z \gamma x b^{ir} \eta_{is} \eta_{rs} + \\ + z^2 x^2 b^{ir} b^{ks} \eta_{ik} \eta_{rs} + \dots = \gamma^2 [Q_e + 2 z L_{ef} + 2 z^2 (L_{ebf} - Q_{eb}) + z^2 Q_f] + \\ + 2 z \gamma x (L_{bee} + 2 z L_{bef}) + z^2 x^2 Q_{eb} + \dots, \end{cases}$$

ove

$$(27) \quad \begin{cases} L_{beb} \equiv b^{ir} E_{rs} b^s_i = E_{rs} (h b^{rs} - k a^{rs}) = h L_{be} - k L_e \\ L_{bee} \equiv b^{ir} E_{rs} E^s_i = b^{ir} \left(L_e E_{ri} - \frac{L_e^2 - Q_e}{2} a_{ri} \right) = L_e L_{be} - \frac{h}{2} (L_e^2 - Q_e) \end{cases}$$

(7) L'invariante cubico $C \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon_{\gamma}^{\beta} = \varepsilon_{ik} \varepsilon^{ir} \varepsilon_r^k$ non è indipendente da L e Q . Precisamente si ha, utilizzando opportunamente l'identità di cui alla nota (2),

$$C = \varepsilon_{ik} \left(L \varepsilon^{ik} - \frac{L^2 - Q}{2} g^{ik} \right) = LQ - \frac{1}{2} L (L^2 - Q) = \frac{L}{2} (3Q - L^2).$$

e insieme

$$(28) \quad \gamma = 1 - 3kz^2 + \dots, \quad x = -2 + 3hz + \dots$$

Dalla (26)₁ segue inoltre

$$\begin{aligned} L^2 &= \gamma^2 L_e^2 + 2z\gamma L_e (\gamma L_f + xL_{be}) + z^2 (\gamma L_f + xL_{be})^2 + \\ &+ 2z^2 \gamma L_e (L_{bf} - L_{beb} + xL_{bf}) = (1 - 4kz^2) L_e^2 + 2zL_e [L_f - \\ &- 2(1 - hz)L_{be} - zL_{bf}] + z^2 (L_f - 2L_{be})^2 + \dots; \end{aligned}$$

sì che dal potenziale classico $W = \frac{1}{2} (\lambda L^2 + 2\mu Q)$ (λ e μ coefficienti di Lamè), per integrazione si ottiene

$$(29) \quad \boxed{w = w_e + w_f + w_{ef} + w'_e}$$

ove si è posto

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} w_e &= h(\lambda L_e^2 + 2\mu Q_e) \quad , \quad w_f = \frac{1}{3} h^3 (\lambda L_f^2 + 2\mu Q_f) \\ w_{ef} &= \frac{2}{3} h^3 h (\lambda L_e L_f + 2\mu L_{ef}) - \frac{2}{3} h^3 [\lambda (L_e L_{bf} + 2L_f L_{be}) + 6\mu L_{ebf}] \\ w'_e &= \frac{4}{3} h^3 (\lambda L_{be}^2 + \mu Q_{be}) + \frac{4}{3} h^3 h \mu L_e L_{be} - \frac{1}{3} h^3 (3\lambda k + 2\mu h^2) L_e^2 + \\ &\quad + \frac{2}{3} h^3 \mu (h^2 - 5k) Q_e. \end{aligned} \right.$$

Naturalmente le limitazioni classiche $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$ assicurano a w il carattere di forma definita positiva, almeno subordinatamente all'ipotesi che sia definita positiva la metrica $g_{ik} dx^i dx^k$ per ogni z nell'intervallo $(-h, h)$.

Tanto w_{ef} , che contiene i termini di accoppiamento, quanto w'_e , pur essendo, a mio avviso, *perfettamente legittimi*, non figurano nelle teorie linearizzate ordinarie (cfr. ad esempio [5], p. 530 e, più recentemente [4], p. 17). Essi sono trascurabili rispetto a w_e e w_f soltanto se si suppone poco incurvata la superficie di riferimento σ , trascurabili cioè h e k , nonchè gli invarianti dei due tensori E_{ik} e F_{ik} costruiti con b_{ik} . In questo caso si può ritenere $w = w_e + w_f$ e, assumendo su σ coordinate di curvatura, con che ⁽⁸⁾

$$(31) \quad a_{11} = A_1^2, a_{12} = 0, a_{22} = A_2^2 \quad ; \quad b_{11} = -\frac{A_1^2}{R_1}, b_{12} = 0, b_{22} = -\frac{A_2^2}{R_2},$$

($R_1 > 0$, $R_2 > 0$ raggi di curvatura principali), risulta

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} L_e &= \frac{E_{11}}{A_1^2} + \frac{E_{22}}{A_2^2} \quad , \quad Q_e = \frac{E_{11}^2}{A_1^4} + 2 \frac{E_{12}^2}{A_1^2 A_2^2} + \frac{E_{22}^2}{A_2^4} \\ L_f &= \frac{F_{11}}{A_1^2} + \frac{F_{22}}{A_2^2} \quad , \quad Q_f = \frac{F_{11}^2}{A_1^4} + 2 \frac{F_{12}^2}{A_1^2 A_2^2} + \frac{F_{22}^2}{A_2^4}. \end{aligned} \right.$$

(8) Si suppone la normale $\mathbf{n}$ a σ orientata verso la concavità della superficie.

D'altra parte, indicati con δ_1 e δ_2 , δ_3 rispettivamente, gli allungamenti e lo scorrimento, si ha $A_{11} = a_{11} (1 + \delta_1)^2$, $A_{22} = a_{22} (1 + \delta_2)^2$, $A_{12} = \sqrt{A_{11} A_{22}} \delta_3$, da cui

$$(33) \quad \begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2} A_1^2 \delta_1 (2 + \delta_1) \quad , \quad E_{22} = \frac{1}{2} A_2^2 \delta_2 (2 + \delta_2), \\ E_{12} &= \frac{1}{2} A_1 A_2 \delta_3 (1 + \delta_1) (1 + \delta_2), \end{aligned}$$

nonché, K_1 , K_2 e τ essendo le «changes of curvature» del Love (cfr. [1], p. 473):

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} F_{11} &= A_1^2 \left[(1 + \delta_1) K_1 + \frac{\delta_1}{R_1} \right], \\ F_{12} &= A_1 A_2 (1 + \delta_2) \left[\delta_3 \left(K_1 + \frac{1}{R_1} \right) + \sqrt{1 - \delta_3^2} \tau \right] \\ F_{22} &= A_2^2 (1 + \delta_2) \left\{ \frac{1 + \delta_2}{1 + \delta_1} \delta_3 \left[\delta_3 \left(K_1 + \frac{1}{R_1} \right) + \sqrt{1 - \delta_3^2} \tau \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 - \delta_3^2} K_2 + \frac{1}{R_2} \left(\sqrt{1 - \delta_3^2} - \frac{1}{1 + \delta_2} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ne consegue, conservando nelle (33) e (34) solo i termini di 1° ordine, la seguente espressione di w_e e w_f :

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} w_e &= h \left[(\lambda + 2\mu) (\delta_1 + \delta_2)^2 - 4\mu \left(\delta_1 \delta_2 - \frac{\delta_3^2}{4} \right) \right] \\ w_f &= \frac{h^3}{3} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(K_1 + \frac{\delta_1}{R_1} + K_2 + \frac{\delta_2}{R_2} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4\mu \left[\left(K_1 + \frac{\delta_1}{R_1} \right) \left(K_2 + \frac{\delta_2}{R_2} \right) - \left(\tau + \frac{\delta_3}{R_1} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

A differenza di w_e , e contrariamente a quanto si ammette generalmente, w_f non conserva la sua espressione formale nel passaggio da una piastra ad una volta; anzi l'intervento di $\tau + \frac{\delta_3}{R_1}$ in luogo di τ è tanto più necessario in quanto assicura al potenziale il carattere di *invarianza* rispetto allo scambio delle linee di curvatura.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] FERRARESE G., *Sulle deformazioni finite di una volta*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 4, vol. XXXVI (1964).
- [2] FERRARESE G., *Contributi alla teoria matematica delle volte*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 5, vol. XL (1966).
- [3] FERRARESE G., *Sulla relazione simbolica della meccanica delle volte*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. II, vol. XLI (1966).
- [4] KOITER W. T., *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, in Proceedings of the Symposium in the Theory of thin elastic shells, Delft 1959, Koiter, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- [5] LOVE A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, IV ed., The University Press., Cambridge (1952).
- [6] SIGNORINI A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I in « Annali Matem. Pura e Appl. », XXII (1943).