Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Reuven R. Rottenberg

Surfaces planaires et congruences P. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 195–201.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Geometria. — *Surfaces planaires et congruences* P. Nota II di REUVEN R. ROTTENBERG, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUNTO. — Si continua la Nota I, apparsa nel precedente fascicolo di questi « Rendiconti », della quale veggasi il Sunto.

2. SURFACES CUBIQUES RÉGLÉES. - Une surface cubique réglée possède en général, outre la famille de génératrices, deux droites directrices: une directrice simple L_1 qui intersecte toutes les génératrices en des points distincts, et une directrice double L_2 qui rencontre les génératrices par couples. Les deux directrices peuvent coincider, on a alors une surface de Cayley (voir [4]).

Dans une représentation paramétrique planaire d'une surface cubique réglée par des polynômes de degré $n \leq 2$, les sections planes sont les images d'une famille triplement infinie F de coniques du plan π ayant toutes un point commun A (singulier); le faisceau de droites de sommet A correspond aux génératrices de la surface. Une section par un plan tangent se décompose en une génératrice et une conique, ces deux courbes ensemble sont l'image d'une conique dégénérée de F, donc de deux droites. Inversement, toute droite du plan π a pour image sur la surface soit une génératrice, soit une conique section par un plan tangent, soit encore la directrice double L_2 (la directrice simple est singulière). L'ensemble des plans tangents n'appartenant pas à une gerbe, nous obtenons le théorème:

THÉORÈME 5. - *Les surfaces cubiques réglées sont planaires; l'ensemble des courbes planes sections d'une telle surface par ses plans tangents, y compris les génératrices et la directrice double, forment une congruence* P.

A titre d'exemple, nous étudions une surface de Cayley, que nous prenons dans un espace affine A_3 muni de coordonnées non-homogènes (x, y, z). Une représentation planaire possible d'une telle surface, est alors:

$$x = u \quad , \quad y = u^2 + v \quad , \quad z = uv \tag{17}$$

ou encore: $z = xy - x^3$. La directrice unique est la droite à l'infini dans le plan $x = 0$, c'est une droite double. Nous obtenons alors, pour la congruence P définie par (17), les résultats suivants:

les courbes $u = c$ sont les génératrices rectilignes situées dans les plans $x = c$ qui contiennent encore la directrice comptée deux fois; ces plans sont tangents à la surface au point (à l'infini) où les génératrices et la directrice s'intersectent;

une courbe $v = mu + c$ sur la surface est une conique section par le plan:

$$(m^2 - c)\, x - my + z + cm = 0 \tag{18}$$

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1967.

et, substituant les équations (17) dans (18), on obtient:

$$(m - u)(mu + c - v) = 0 \tag{19}$$

donc la section par le plan (18) est formée par la courbe C: $v = mu + c$, et la génératrice $u = m$; ce plan est donc tangent à la surface au point (u_0, v_0) d'intersection de C avec la génératrice, avec:

$$u_0 = m \quad , \quad v_0 = m^2 + c. \tag{20}$$

La génératrice et la conique C s'intersectent encore au point à l'infini où le plan (18) rencontre la directrice. Ces résultats sont valables pour le cas $m = 0$.

Remarque 1. – Notons que l'ensemble des plans (18) et des plans $x = c$, qui déterminent la congruence P sur la surface de Cayley, est formé de faisceaux de plans dont les axes sont les génératrices et la directrice à l'infini. Les plans (18) appartenant à un même faisceau correspondent à une valeur fixe de m, c étant variable.

3. CÔNES DU SECOND DEGRÉ. – Il existe différentes représentations planaires d'un cône du second degré par des polynômes de degré $n \leq 2$; certaines sont triviales, donnant une gerbe, d'autres définissent une congruence P. Ainsi, la représentation paramétrique:

$$x_1 = u^2 \quad , \quad x_2 = v^2 \quad , \quad x_3 = uv \quad , \quad x_4 = u \tag{21}$$

donne l'équation $x_3^2 = x_1 x_2$ d'un cône de sommet $(0, 0, 0, 1)$. On vérifie aisément qu'une courbe $au + bv + c = 0$ sur la surface est située dans le plan:

$$ax_1 + bx_3 + cx_4 = 0. \tag{22}$$

Or, tous les plans (22) forment la gerbe de sommet $(0, 1, 0, 0)$; la congruence planaire définie par (21) sur le cône est donc triviale.

Par contre, considérons la représentation paramétrique (planaire):

$$x_1 = u^2 \quad , \quad x_2 = v^2 \quad , \quad x_3 = uv \quad , \quad x_4 = 1 \tag{23}$$

donnant comme précédemment l'équation $x_3^2 = x_1 x_2$; le plan $x_4 = 0$ coupe le cône selon la conique Γ d'équations: $x_4 = 0$, $x_3^2 = x_1 x_2$. Nous montrons maintenant que (23) définit une congruence P sur le cône. Comme dans les cas précédents, nous considérons l'espace affine A_3, avec $x_4 = 0$ pour plan à l'infini, (x, y, z) étant les coordonnées non-homogènes d'un point de A_3. La représentation (23) du cône devient alors:

$$x = u^2 \quad , \quad y = v^2 \quad , \quad z = uv \tag{24}$$

l'équation non-homogène étant: $z^2 = xy$, et le sommet le point $(0, 0, 0)$.

Notons, d'abord, que la représentation (24) n'est pas bi-univoque: les points (u, v) et $(-u, -v)$, du plan π des paramètres, ont même image sur la surface, avec pour conséquence, que les deux droites $v = mu \pm c \ (c \neq 0)$ sont appliquées sur la même courbe du cône, et il en est de même pour les deux droites $u = \pm c \ (c \neq 0)$. Tenant compte de ce fait, on a alors les résultats suivants:

les droites $u = 0$ et $v = mu$ (m constante) du plan π ont pour images, sur le cône, les génératrices rectilignes de celui-ci. Le plan tangent au cône le long de la génératrice $u = 0$ est le plan $x = 0$, alors que le plan tangent le long d'une génératrice $v = mu$ est donné par l'équation:

$$m^2 x + y - 2 mz = 0; \tag{25}$$

les courbes $u = \pm c \ (c \neq 0)$ sont obtenues par section du cône avec les plans $x = c^2$, qui sont parallèles au plan $x = 0$ tangent le long de la génératrice $u = 0$ (voir ci-dessus);

une paire de courbes $v = mu \pm c$ (qui coincident sur la surface) est située dans le plan:

$$m^2 x + y - 2 mz - c^2 = 0. \tag{26}$$

Pour une valeur fixe de m et c variable, les plans (26) sont parallèles au plan (25) tangent le long de la génératrice $v = mu$ (correspondant à $c = 0$). Ce faisceau de plans parallèles a donc pour axe la droite à l'infini tangente à la conique Γ, (section du cône par le plan à l'infini) au point où la génératrice $v = mu$ rencontre Γ.

On a un résultat semblable pour les plans $x = c^2$ donnant les courbes $u = \pm c$. Or les tangentes à la conique Γ ne passent pas toutes par un même point; les faisceaux de plans (26) et des plans $x = c^2$ n'appartiennent donc pas à une gerbe. La congruence planaire définie par (24) sur le cône est donc bien une congruence P, le cône du second degré est une surface planaire.

Nous allons maintenant montrer un autre résultat intéressant: l'existence d'une infinité de congruences P distinctes sur un cône du second degré. En effet, considérons un plan α de l'espace projectif S_3 qui ne passe pas par le sommet du cône et distinct du plan $x_4 = 0$; ce plan α coupe le cône en une conique Γ'. Il existe une transformation projective H de S_3 qui laisse invariante la gerbe de plans et droites de sommet $(0, 0, 0, 1)$ et applique le plan $x_4 = 0$ sur α. H applique chaque génératrice du cône sur elle-même (pas identiquement), la conique Γ sur Γ', et donc une tangente l à Γ sur la tangente correspondante l' à Γ'; par suite, H applique le faisceau de plans d'axe l sur le faisceau d'axe l'. L'homographie H induit, ainsi, une application F du cône sur lui-même; une section plane étant appliquée sur une section plane, la congruence P définie par (24) est appliquée par F sur une famille E de courbes planes; en vertu du théorème 6 de [1], E est une congruence planaire. Or les plans qui déterminent les courbes de E forment des faisceaux n'appartenant pas à une même gerbe, donc E est une congruence P, évidemment distincte de la congruence définie par (24). Le plan α est arbitraire, l'homographie H n'est pas unique, nous avons donc obtenu le résultat énoncé; nous avons ainsi démontré le:

THÉORÈME 6. – *Le cône du second degré est une surface planaire et il possède une infinité de congruences* P *distinctes. Chacune de ces congruences est formée des sections de la surface par une famille de faisceaux de plans dont les axes sont les tangentes à une même conique section du cône par un plan ne passant pas par le sommet. Ces diverses congruences* P *sont projectivement équivalentes.*

Nous ne savons pas s'il existe des congruences P d'un autre type sur un cône du second degré.

Les trois types de surfaces que nous venons de traiter, et les quadriques à génératrices réelles que nous avons étudiées au théorème 1, sont les seules surfaces représentables par des polynômes du second degré (à part les cas triviaux ou dégénérés). Nous donnons maintenant un exemple de surface planaire qui n'est pas de la catégorie précédente, les polynômes qui la représentent étant du troisième degré ou moins.

4. SURFACE TÉTRAHÉDRALE. – Cette surface est un cas particulier de surfaces de coincidence (voir [5] et [6]). Une représentation paramétrique possible de cette surface est donnée par les équations:

$$x_1 = u^3 \quad , \quad x_2 = v^3 \quad , \quad x_3 = uv \quad , \quad x_4 = 1 .$$

On vérifie, sans peine, que cette représentation satisfait le système (8), c'est-à-dire qu'elle est planaire, et nous allons montrer qu'elle définit une congruence P.

L'équation homogène de la surface est $x_1 x_2 x_4 = x_3^3$, c'est une surface cubique non réglée, mais elle possède trois droites: $L_1 : x_1 = x_3 = 0$ (correspondant à $u = 0$), $L_2 : x_2 = x_3 = 0$ $(v = 0)$ et $L_3 : x_3 = x_4 = 0$ (droite à l'infini du plan π). Comme dans les cas précédents, nous étudions cette surface dans l'espace affine A_3 pour lequel $x_4 = 0$ est le plan à l'infini, (x , y , z) sont les coordonnées non-homogènes. On obtient alors pour la surface tétrahédrale, la représentation paramétrique:

$$x = u^3 \quad , \quad y = v^3 \quad , \quad z = uv \tag{27}$$

ou encore $xy = z^3$. Notons que la représentation (27) n'est pas biunivoque, les points: $A(u , v)$, $A'(\varepsilon u , \varepsilon^2 v)$ et $A''(\varepsilon^2 u , \varepsilon v)$ avec $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ont même image (x , y , z) sur la surface, avec pour conséquence que les trois droites du plan π:

$$\left\{\begin{array}{l} l \ : v = mu + c \\ l' \ : v = m\varepsilon u + \varepsilon^2 c \\ l'' : v = m\varepsilon^2 u + \varepsilon c \end{array}\right. \tag{28}$$

sont appliquées sur la même courbe de la surface; et il en est de même pour les trois droites:

$$u = c \quad , \quad u = \varepsilon c \quad \text{et} \quad u = \varepsilon^2 c \qquad (c \neq 0). \tag{29}$$

Compte–tenu de cette remarque, nous obtenons les résultats suivants:

les droites $u = c$, $v = c$ $(c \neq 0)$ et $v = mu$ $(m \neq 0)$ du plan π sont appliquées sur les sections de la surface par les plans $x = c^3$, $y = c^3$ et $y = m^3 x$ respectivement, qui ne sont pas des plans tangents. Ces sections planes sont les courbes (cubiques) de Segre de la surface. La droite $u = 0$ a pour image la droite $L_1 : x = z = 0$, le plan $x = 0$ coupe la surface selon cette droite comptée trois fois, c'est un plan tangent. De même, $v = 0$ correspond à la droite $L_2 : y = z = 0$, le plan $y = 0$ coupant la surface selon cette droite comptée trois fois, c'est aussi un plan tangent;

une courbe $v = mu + c$ $(mc \neq 0)$ sur la surface est une cubique section par le plan:

$$m^3 x - y + 3\,mcz + c^3 = 0 \tag{30}$$

et, substituant (27) dans (30) on obtient:

$$(mu + c - v)\,(m\varepsilon u + \varepsilon^2 c - v)\,(m\varepsilon^2 u + \varepsilon c - v) = 0$$

c'est–à–dire les trois droites l, l', l'' de (28) qui, comme indiqué ci–haut, coincident sur la surface.

Un plan (30) est tangent à la surface au point réel (x_0, y_0, z_0) avec:

$$x_0 = \frac{c^3}{m^3} \quad , \quad y_0 = -c^3 \quad , \quad z_0 = -\frac{c^2}{m} \tag{31}$$

qui correspond au point réel $A : u_0 = \frac{c}{m}$, $v_0 = -c$ situé sur l'' (et non sur l), ou encore au point imaginaire $A' : u'_0 = \frac{\varepsilon c}{m}$, $v'_0 = -\varepsilon^2 c$ situé sur l.

Concluant cette étude, on voit bien que la représentation (27) est planaire, les courbes $u = c$, $v = c$, $v = mu + c$ étant toutes planes sur la surface. D'autre part, les plans $x = c^3$, $y = c^3$ et $y = m^3 x$ (qui donnent les courbes de Segre, on l'a vu) forment des faisceaux d'axes respectivement: la droite à l'infini du plan $x = 0$, la droite à l'infini du plan $y = 0$, et la droite $x = y = 0$; ces trois axes se rencontrent bien en un même point: le point à l'infini de l'axe $x = y = 0$, mais les plans tangents (30) ne passent pas par ce point (pour $mc \neq 0$). Donc l'ensemble des plans qui déterminent la congruence planaire définie par (27) n'appartient pas à une même gerbe; on a bien une congruence P. Nous avons ainsi démontré le:

THÉORÈME 7. – *La surface tétrahédrale* (*cubique*) *est une surface planaire. Une congruence* P *sur cette surface est formée par ses trois droites* L_1, L_2, L_3, *les courbes de Segre et les sections tangentielles par des plans tangents ne passant pas par une des droites* L_i $(i = 1, 2, 3)$.

Remarque 2. – Les courbes de Darboux qui, comme on le sait (voir [6]) sont également planes sur la surface tétrahédrale (27), ne font pas partie de la congruence P obtenue ci–dessus. Ce sont les images des coniques $v = cu^2$, $u = cv^2$ et $uv = c$ $(c \neq 0)$ du plan π; et sur la surface, ce sont des coniques sections par les plans $z = cx$, $z = cy$, $z = c$ respectivement, qui passent encore par les droites L_1, L_2 et L_3 respectivement.

V. Correspondances entre surfaces planaires.

En vertu du théorème 5 de [1], nous pouvons établir une correspondnace entre deux surfaces planaires Σ_1 et Σ_2, qui applique une congruence P sur Σ_1 sur une congruence P de Σ_2. Toutefois, cette correspondance n'est pas nécessairement bi–univoque.

Ainsi, considérons une correspondance entre une surface de Steiner définie par les (10), et le cône du second degré donné par (24), deux points homologues correspondant aux mêmes valeurs des paramètres (u, v). Sur la surface de Steiner, les deux courbes $v = mu \pm c$ sont distinctes, alors que sur le cône elles coincident, la correspondance est donc (2, 1) en général.

De même, une telle correspondance entre deux congruences P n'induit pas nécessairement une correspondance bi–univoque entre les plans qui déterminent les courbes de ces congruences, et nous ne pouvons obtenir ici un résultat analogue au dernier paragraphe du théorème 8 de [1] relatif à une correspondance entre deux gerbes. Considérons, par exemple, une correspondance entre la surface de Steiner (10) et la surface de Cayley (17), telle que deux points homologues ont mêmes valeurs des paramètres (u, v); on applique ainsi la courbe plane $v = mu + c$ de l'une des surfaces sur la courbe plane de même équation sur l'autre surface. Sur la surface de Steiner, cette courbe est située dans le plan (11), alors que sur celle de Cayley, elle est dans le plan (18); on induit ainsi une correspondance entre ces plans. Or, comme nous l'avons vu, le plan (11) contient encore la courbe $v = \frac{u}{m} + \frac{1}{c}$, qui n'est pas dans le plan (18), alors que ce dernier contient la courbe $u = m$ qui n'est pas dans le plan (11). On voit bien que la correspondance induite entre les plans qui déterminent les deux congruences P n'est pas bi–univoque. Notons encore que les plans (11) et (18) correspondants sont tangents aux surfaces respectives aux points (13) et (20) respectivement, et ces points ne sont pas homologues dans la correspondance entre les surfaces.

Si nous considérons une correspondance entre la surface de Cayley et le cône du second degré, des points homologues ayant mêmes valeurs des paramètres (u, v), la correspondance induite entre les plans (18) et (26) n'est pas bi–univoque, mais elle a la particularité d'appliquer un faisceau de plans (pour m fixe) sur un faisceau correspondant; il en est de même entre les plans $x = c$ pour la surface de Cayley et les plans correspondants $x = c^2$ pour le cône.

VI. Conclusion.

De l'étude que nous venons de faire, nous tirons les conclusions suivantes:

il existe des surfaces qui ne sont pas planaires;

il existe des surfaces planaires des divers types: développables (cône), réglées non développables, et non–réglées;

une surface planaire peut posséder une infinité de congruences P.

Nous relevons, toutefois, les observations suivantes:

1° les surfaces planaires et non–planaires étudiées ici sont toutes algébriques. Nous n'avons pas d'exemple de surfaces transcendantes planaires ou non;

2° par définition, une surface planaire possède au moins une congruence P; nous ne savons pas si celle–ci peut être unique, ou s'il y en a toujours plusieurs ou même une infinité;

3° si une correspondance entre deux surfaces applique une famille (∞^2) de courbes planes de l'une sur une famille de courbes également planes, de l'autre, ces familles sont–elles nécessairement des congruences (triviales ou P)? Nous savons, par le théorème 6 de [1], que si une des familles est une congruence planaire, l'autre l'est aussi; mais nous ne savons pas s'il est possible que les deux familles ne soient pas des congruences planaires.

L'Auteur exprime, à cette occasion sa vive reconnaissance à Prof. B. Segre pour ses nombreuses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. R. ROTTENBERG, *Correspondances entre Surfaces à Congruences planaires*. A paraître dans « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, vol. XXV, fasc. 3–4 (1966), 1967.

[2] G. FUBINI et E. CECH. *Introduction à la Géométrie Projective Différentielle des Surfaces*, p. 81, Gauthiers–Villars Edit., Paris 1931.

[3] C. MICHEL, *Compléments de Géométrie Moderne*, deuxième édition pp. 224–246, Librairie Vuibert, Paris 1941.

[4] C. MICHEL, Ibidem, pp. 265–270.

[5] B. SEGRE, *Some Properties of Differentiable Varieties and Transformations*, p. 62, Springer–Verlag 1957.

[6] G. FUBINI et E. CECH, *Introduction à la Géométrie Projective Différentielle des Surfaces*, pp. 102–103, Gauthiers–Villars 1931.