Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

N. Boboc, P. Mustață

Sur un problème concernant les domaines d'unicité pour le problème de Dirichlet associé à un opérateur elliptique

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 181–186.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_181_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Analisi matematica. — *Sur un problème concernant les domaines d'unicité pour le problème de Dirichlet associé à un opérateur elliptique.* Nota di N. BOBOC e P. MUSTAȚĂ, presentata [(*)] dal Corrisp. C. MIRANDA.

RIASSUNTO. — In questa Nota si risolve un problema posto da C. Miranda, la cui risoluzione permette di dimostrare l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet riguardante un operantore lineare uniformemente ellittico del secondo ordine e un dominio regolare con dati, continui sulla frontiera e nell'ipotesi che valga il relativo teorema d'unicità della soluzione.

Si Ω est un domaine régulier relativement compact de R^n et L est un opérateur linéaire uniformément elliptique de second ordre sur Ω tel que Ω est un domaine d'unicité pour le problème de Dirichlet associé à L, on démontre qu'il existe une constante $\gamma = \gamma(L, \Omega)$ telle que

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \gamma \left(\sup_{x \in \Omega} |Lu(x)| + \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x)|\right)$$

pour toute fonction u continue sur $\overline{\Omega}$ et continue différentiable de second ordre sur Ω. C'est un problème posé par C. Miranda ([3], chap. V, 35, VI). De cette relation on peut démontrer ([3], chap. V, 36, IV) l'existence d'une solution du problème de Dirichlet avec les données continues sur $\partial\Omega$. Les coefficients de l'opérateur L sont supposés hölderiens.

1. Soient Ω un domaine relativement compact de R^n et a un nombre réel non entier, $a > 2$. Pour chaque fonction réelle f sur Ω pour laquelle toutes les dérivées $D^j f$, $|j| < a$ [(1)] existent et sont continues, nous noterons

$$\|f\|_a^\Omega = \|f\|_a := \sum_{k=0}^{n(a)} [f]_k + [f]_a$$

où $n(a)$ est la partie entière de a,

$$[f]_k^\Omega = [f]_k = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |j|=k}} |D^j f(x)|, \qquad k \in N,\ k < a$$

et

$$[f]_a^\Omega = [f]_a = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ |j|=n(a)}} \frac{|D^j f(x) - D^j f(y)|}{|x-y|^{a-n(a)}}.$$

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1967.

(1) Si $j \in N^n$, $j = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$ nous posons

$$|j| = \sum_{k=1}^{n} j_k \quad , \quad D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \cdots \partial x_n^{j_n}}.$$

Nous considérons l'espace de Banach $\mathcal{C}^a(\Omega)$ des fonctions réelles f sur Ω pour laquelle $\|f\|_a < +\infty$ muni de la norme

$$f \to \|f\|_a .$$

Evidemment chaque fonction $u \in \mathcal{C}^a(\Omega)$ peut être prolongée à une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ dont la restriction à $\partial\Omega$ (la frontière de Ω) sera désignée par $\mathrm{B}u$.

L'espace de Banach $\mathcal{C}^a(\partial\Omega)$ des fonctions f sur $\partial\Omega$ de la forme $f = \mathrm{B}u$, $u \in \mathcal{C}^a(\Omega)$ doté par la norme

$$|||f|||_a = \inf\{\|u\|_a \mid u \in \mathcal{C}^a(\Omega) , f = \mathrm{B}u\}$$

est isomorphe à l'espace quotient

$$\mathcal{C}^a(\Omega)/\mathcal{C}_0^a(\Omega)$$

où $\mathcal{C}_0^a(\Omega)$ est le sous–espace de $\mathcal{C}^a(\Omega)$ formé par les fonctions u pour lequel $\mathrm{B}u = 0$.

Nous désignerons par $\mathfrak{L}(\Omega)$ l'ensemble des applications

$$\mathrm{L} : \mathcal{C}^a(\Omega) \to \mathcal{C}^{a-2}(\Omega)$$

$$\mathrm{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

où, pour chaque L,

1° $a^{ij}, b^i, c \in \mathcal{C}^{a-2}(\Omega)$, $i , j \in \{1 , 2 , \cdots , n\}$;

2° il existe un nombre réel positif σ tel que

$$\xi \in \mathrm{R}^n \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \sigma |\xi|^2.$$

Nous désignerons par $\mathfrak{F}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et continues différentiables de second ordre sur Ω. Soient $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}(\Omega)$.

$$\mathrm{L} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

et U un domaine, $\mathrm{U} \subset \Omega$. Nous noterons pour toute fonction $v \in \mathfrak{F}(\mathrm{U})$ par $\mathrm{L}v$ la fonction

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + cv.$$

Il est bien connu ([2], [3]), l'assertion suivante:

a) *Pour chaque* $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}(\Omega)$ *et pour chaque domaine* U , $\overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$ *il existe une constante* γ *telle que*

$$u \in \mathcal{C}^a(\Omega) \Rightarrow \|u\|_a^{\mathrm{U}} \leq \gamma(\|\mathrm{L}u\|_{a-2}^{\Omega} + [u]_0^{\Omega}).$$

Un domaine relativement compact Ω de R^n sera nommé *a–régulier* si les conditions suivantes sont remplies:

1° *pour chaque* $f \in \mathcal{C}^{a-2}(\Omega)$ *il existe une fonction* $u \in \mathcal{C}^a(\Omega)$ *telle que* $Bu = 0$ *et*

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f ;$$

2° *pour chaque couple* (γ_0 , σ_0) *des nombres réels positifs il existe une constante* γ *telle que*

$$u \in \mathcal{C}^a(\Omega) \Rightarrow \| u \|_a \leq \gamma (\| Lu \|_{a-2} + [u]_0 + ||| Bu |||_a)$$

pour tout $L \in \mathfrak{L}(\Omega)$

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

où

$$\| a^{ij} \|_{a-2} \quad , \quad \| b^i \|_{a-2} \quad , \quad \| c \|_{a-2} \leq \gamma_0$$

$$\xi \in R^n \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \sigma_0 | \xi |^2 .$$

On sait ([1]) que pour chaque domaine Ω et pour chaque compact K, $K \subset \Omega$, il existe un domaine *a*–régulier U tel que $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$. De même on sait ([2], [3]) que:

b) Soient Ω *un domaine a–régulier et* $L \in \mathfrak{L}(\Omega)$. *Si on a*

$$(u \in \mathcal{C}_0^a(\Omega) , Lu = 0) \Rightarrow u = 0$$

alors por chaque $f \in \mathcal{C}^{a-2}(\Omega)$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}^a(\partial\Omega)$ *il existe* $u \in \mathcal{C}^a(\Omega)$ *tel que*

$$Lu = f \quad , \quad Bu = \varphi .$$

2. Soit Ω' un domaine de R^n. Un domaine relativement compact Ω, $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ sera nommé *domaine d'unicité par rapport à* $L \in \mathfrak{L}(\Omega')$ si pour chaque fonction v continue sur $\overline{\Omega}$ dont la restriction à tout domaine U, $\overline{U} \subset \Omega$, appartient à $\mathcal{C}^a(U)$, est égal à zéro si

$$Lv = 0 \quad \text{et} \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

On sait ([2], [3]) l'assertion suivante:

c) S'il existe sur Ω *une fonction* $s \in \mathcal{F}(\Omega)$ *telle que*

$$\inf_{x \in \Omega} s(x) > 0 \quad , \quad Ls \leq 0$$

alors Ω *est un domaine d'unicité par rapport à* $L \in \mathfrak{L}(\Omega')$. *De plus il existe une costante* $\gamma = \gamma(\Omega , L)$ *telle que*

$$u \in \mathcal{F}(\Omega) \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} | u(x) | \leq \gamma (\sup_{x \in \Omega} | Lu(x) | + \sup_{x \in \partial\Omega} | u(x) |).$$

REMARQUE 1. – Utilisant les propositions *b*) et *a*) on déduit que pour chaque domaine *a*–régulier Ω pour lequel l'hypothèse de la proposition *c*) est remplie et pour chaque fonction réelle continue φ sur $\partial\Omega$ il existe une fonction $u \in \mathfrak{F}(\Omega)$ telle que

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad , \quad \mathrm{L}u = 0$$

et telle que pour tout domaine U, $\overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, on a

$$u|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^a(\mathrm{U}).$$

REMARQUE 2. – Pour chaque $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}(\Omega')$ il existe une base de Ω' formée par des domaines *a*–réguliers pour lesquels l'hypothèse de la proposition *c*) est remplie.

PROPOSITION. – *Supposons que* Ω *est un domaine d'unicité par rapport à* $\mathrm{L} \in \mathfrak{L}(\Omega')$. *Alors il existe une constante* $\gamma = \gamma(\mathrm{L})$ *telle que*

$$u \in \mathfrak{F}(\Omega) \Rightarrow \sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \gamma \left(\sup_{x \in \Omega} |\mathrm{L}u(x)| + \sup_{x \in \partial\Omega} |u(x)|\right).$$

Supposons que la proposition n'est pas vraie. Alors il existe une suite (u_n) $u_n \in \mathfrak{F}(\Omega)$ telle que

$$\sup_{x \in \Omega} |u_n(x)| = 1 \quad , \quad \sup_{x \in \Omega} |\mathrm{L}u_n(x)| \to 0 \quad , \quad \sup_{x \in \partial\Omega} |u_n(x)| \to 0.$$

Soit V un domaine *a*–régulier, par rapport à L, $\overline{\mathrm{V}} \subset \Omega$ tel que l'hypothèse de la proposition *c*) est remplie. Pour chaque $n \in \mathrm{N}$ nous désignerons par h_n la fonction de $\mathfrak{F}(\mathrm{V})$ telle que

$$h_n|_{\partial\mathrm{V}} = u_n|_{\partial\mathrm{V}} \quad , \quad \mathrm{L}h_n = 0$$

et telle que pour chaque domaine U, $\overline{\mathrm{U}} \subset \mathrm{V}$ on *a*

$$h_n|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^a(\mathrm{U}).$$

Utilisant l'assertion *a*) on déduit qu'il existe une sous–suite de (h_n) qui converge uniformément sur tout compact de V vers une fonction h dont la restriction à tout domaine U, $\overline{\mathrm{U}} \subset \mathrm{V}$ appartient à $\mathcal{C}^a(\mathrm{U})$. Evidemment on a

$$\sup_{y \in \mathrm{V}} |u_n(y) - h_n(y)| \leq \gamma \left(\sup_{y \in \mathrm{V}} |\mathrm{L}u_n(y)|\right) \quad , \quad \mathrm{L}h = 0.$$

Puisque chaque point $x \in \Omega$ appartient à un domaine V du type ci–dessus, alors il existe une sous–suite de (u_n) qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction u telle que pour chaque domaine U, $\overline{\mathrm{U}} \subset \Omega$, on a

$$u|_{\mathrm{U}} \in \mathcal{C}^a(\mathrm{U}) \quad , \quad \mathrm{L}u = 0.$$

Evidemment on peut supposer que la suite (u_n) converge uniformément, sur tout compact de Ω, vers u.

Soit $x \in \partial\Omega$ et (V, U) un couple où V, U sont des domaines a-réguliers $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega'$, $x \in U$, pour lesquels l'hypothèse de la proposition $c)$ est remplie. Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de Ω et une fonction v_ε sur V telle que $v_\varepsilon|_{V'} \in \mathcal{C}^a(V')$ pour tout domaine V', $\overline{V}' \subset V$ et

$$Lv_\varepsilon = 0 \quad , \quad v_\varepsilon \geq 0 \quad , \quad v_\varepsilon|_U \leq \varepsilon ,$$

$$\liminf_{V \ni y \to y' \in \Gamma_\varepsilon} v_\varepsilon(y) \geq 1$$

où

$$\Gamma_\varepsilon = (\partial V) \cap \Omega - K_\varepsilon .$$

Nous désignerons par w (resp. w') une fonction de $\mathcal{C}^a(V)$ pour laquelle

$$Lw = 0 \,(\text{resp. } Lw' = 1),$$

$$w|_{\partial V} = 1 \;(\text{resp. } w'|_{\partial V} = 0).$$

Evidemment

$$\alpha := \inf_{y \in V} w(y) > 0$$

et

$$w' \leq 0 .$$

Soit n_ε un nombre naturel tel que

$$(m, n > n_\varepsilon, y \in K_\varepsilon) \Rightarrow |u_m(y) - u_n(y)| < \varepsilon , \; n > n_\varepsilon \Rightarrow (|u_n|\,|_{\partial\Omega} < \varepsilon , |Lu_n| < \varepsilon).$$

On peut vérifier aisément que, sur $\partial(V \cap \Omega)$ on a pour $n > m > n_\varepsilon$,

$$\limsup_{V \ni y \to y' \in \partial V} \left(u_m(y) - u_n(y) - 2\, v_\varepsilon(y) - \frac{2\,\varepsilon}{\alpha} w(y) + 2\,\varepsilon w'(y)\right) \leq 0.$$

Puisque, sur $V \cap \Omega$, on a

$$L\left(u_m - u_n - 2\, v_\varepsilon - \frac{2\,\varepsilon}{\alpha} w + 2\,\varepsilon w'\right) \geq 0 ,$$

on déduit, sur $V \cap \Omega$, la relation

$$m , n > n_\varepsilon \Rightarrow |u_m - u_n| \leq 2\left(v_\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\alpha} w - \varepsilon w'\right).$$

Donc, sur $U \cap \Omega$, on a

$$n , m > n_\varepsilon \Rightarrow |u_m - u_n| \leq 2\,\varepsilon\left(1 + \frac{w}{\alpha} - w'\right).$$

Nous obtenons ainsi que la fonction u est continue sur $\overline{\Omega}$ et que $u|_{\partial\Omega} = 0$. Tenant compte du fait que Ω est un domaine d'unicité nous avons

$$u = 0$$

La démonstration est ainsi achevée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. BOBOC et P. MUSTAȚĂ, *Remarks on the existence of solution of Dirichlet's problem for strongly elliptic linear operators of the second order*, « Bull. Math. Soc. Math. R.S.R. », 1965 (a paraître).

[2] O. A. LADYZENSKAYA et N. N. URALTZEVA, *Equations linéaires et quasi linéaires du type elliptique*, Moscou 1964.

[3] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlin 1955.