Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Un teorema di esistenza, unicità e regolarità per il sistema di Navier-Stokes nello spazio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 173–180.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_173_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Un teorema di esistenza, unicità e regolarità per il sistema di Navier–Stokes nello spazio* (*). Nota di GIOVANNI PROUSE, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

SUMMARY. — A local existence and uniqueness theorem is given for the solution of the Cauchy problem for the system of Navier-Stokes. The solution thus found has the property that it takes its values in the same functional space in which the initial data are given.

Sia Ω un insieme aperto e limitato dello spazio $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ e sia Γ la sua frontiera.

Detta $\mathfrak{N}$ la varietà dei vettori (a *tre* componenti) indefinitamente differenziabili, a divergenza nulla ed a supporto compatto in Ω, indichiamo con N^σ $(\sigma \geq 0)$ la chiusura di $\mathfrak{N}$ in H^σ.

Seguendo la definizione data da Hopf [1], *diremo che la funzione* $\vec{u}(\eta) = \{\vec{u}(x, \eta); x \in \Omega\}$ *è una soluzione del sistema di Navier–Stokes nell'intervallo* $[0, T]$, *soddisfacente ad una condizione al contorno di Dirichlet omogenea se*:

I) $\vec{u} \in L^2(0, T; N^1)$; $\vec{u}(\eta)$ *è* N^0*–debolmente continua in* $[0, T]$;

II) *Posto*

$$b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx = ((\vec{u} \operatorname{grad}) \vec{v}, \vec{w})_{L^2}, \tag{1}$$

$\vec{u}(\eta)$ *soddisfa l'equazione*

$$\int_0^T \{-(\vec{u}(\eta), \vec{h}'(\eta))_{L^2} + \mu(\vec{u}(\eta), \vec{h}(\eta))_{H_0^1} + b(\vec{u}(\eta), \vec{u}(\eta), \vec{h}(\eta)) - \\ - (\vec{f}(\eta), \vec{h}(\eta))_{L^2}\} \, d\eta = 0 \tag{2}$$

$\forall \vec{h}(\eta)$ N^1*–continua in* $[0, T]$, *con* $\vec{h}' \in L^1(0, T; N^0)$, $\vec{h}(0) = \vec{h}(T) = 0$.

Per le soluzioni del problema di Cauchy per il sistema di Navier–Stokes valgono i seguenti teoremi.

Teorema di esistenza (Hopf [1]): *Se* $\vec{f} \in L^1(0, T; L^2)$, *esiste in* $[0, T]$ *almeno una soluzione del sistema di Navier–Stokes soddisfacente la condizione iniziale*

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \tag{3}$$

dove $\vec{u}_0$ *è un arbitrario elemento* $\in N^0$.

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano. Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

Teorema di unicità (Prodi [2]): *Sia* $\vec{u}(\eta)$ *una soluzione in* $[0, T]$ *del sistema di Navier–Stokes soddisfacente la condizione iniziale* (3). *Se esiste* $p > 3$ *tale che*

$$\vec{u} \in L^{\frac{2p}{p-3}}(0, T; L^p), \tag{4}$$

allora $\vec{u}$ *è, in* $[0, T]$, *l'unica soluzione, nella classe di Hopf, soddisfacente alla* (3). In particolare, se è $p = 5$, si ha l'unicità se esiste una soluzione $\vec{u}(x, \eta) \in L^5(Q)$, Q essendo il cilindro $\Omega \times [0, T]$.

Si hanno quindi teoremi di esistenza ed unicità validi in classi funzionali *diverse* e non è stato finora possibile dare delle condizioni che assicurino l'esistenza in $[0, T]$ di una soluzione soddisfacente alla (4).

Un teorema di unicità ed esistenza della soluzione del problema di Cauchy è stato d'altra parte provato *in piccolo* da Kieselev e Ladyzenskaja [3]; vale infatti il seguente enunciato.

Se $\vec{u}_0 \in N^1 \cap H^2$ *e* $\vec{f} \in H^1(0, T; L^2)$, *si può determinare un valore* $\bar{\eta}$ (*dipendente da* $\vec{u}_0$ *e da* $\vec{f}$) *con* $0 < \bar{\eta} \leq T$, *tale che in* $[0, \bar{\eta}]$ *esista una ed una sola soluzione* $\vec{u}(\eta)$ *soddisfacente alla* (3); *inoltre*

$$\vec{u}'(\eta) \in L^\infty(0, \bar{\eta}; L^2) \cap L^2(0, \bar{\eta}; H_0^1). \tag{5}$$

Tale teorema presenta l'inconveniente che le proprietà di regolarità del dato iniziale non si «trasmettono» alla soluzione in quanto, mentre $\vec{u}_0 \in H^2$, la soluzione $\vec{u}(\eta)$ risulta a valori in H_0^1.

Nella presente nota ci proponiamo di dare un teorema di esistenza ed unicità, in piccolo, del problema di Cauchy per il sistema di Navier–Stokes tale che la solusione $\vec{u}(\eta)$ si trovi, $\forall \eta \in [0, \bar{\eta}]$, *nel medesimo spazio funzionale del dato iniziale* $\vec{u}_0$.

All'enunciato preciso di tale teorema premettiamo qualche osservazione.

Notiamo anzitutto che l'immersione di N^1 in N^0 risulta completamente continua. Esiste allora, come è noto, una successione di numeri reali positivi non decrescenti $\{\lambda_j\}$, con $\lim_{j \to \infty} \lambda_j = +\infty$, ed una successione di elementi $\{\vec{\varphi}_j\} \in N^1$ tali che $\{\vec{\varphi}_j\}$ sia una base in N^0 e N^1 e risulti

$$(\vec{\varphi}_j, \vec{v})_{H_0^1} = \lambda_j (\vec{\varphi}_j, \vec{v})_{L^2} \quad \forall \vec{v} \in N^1 \quad ; \quad (\vec{\varphi}_j, \vec{\varphi}_k)_{L^2} = \delta_{jk}. \tag{6}$$

Seguendo le notazioni introdotte da Baiocchi [4], indicheremo, $\forall \sigma \geq 0$, con l_σ^2 lo spazio delle successioni $\{\alpha_j\}$ di numeri reali tali che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\sigma \alpha_j^2 < +\infty. \tag{7}$$

Tale spazio risulta di Hilbert ponendo

$$(8) \qquad (\{\alpha_j\}, \{\beta_j\})_{l^2_\sigma} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\sigma \alpha_j \beta_j .$$

Indichiamo inoltre con V_σ ($\sigma \geq 0$) lo spazio

$$(9) \qquad \{\vec{v} \in N^0 ; \{(\vec{v}, \vec{\varphi}_j)_{L^2}\} \in l^2_\sigma\} \quad , \quad (\vec{v}, \vec{w})_{V_\sigma} = (\{(\vec{v}, \vec{\varphi}_j)_{L^2}\}, \{(\vec{w}, \vec{\varphi}_j)_{L^2}\})_{l^2_\sigma} .$$

È evidente che gli spazi V_σ e l^2_σ così definiti risultano isomorfi; inoltre N^0 e N^1 sono isomorfi rispettivamente a V_0 e V_1.

Si dimostra poi (cfr. Baiocchi [4]), grazie ad un teorema di Nirenberg [5] sulla regolarizzazione delle soluzioni di equazioni di tipo ellittico, che, se Γ è di classe C^2, risulta, per $0 \leq \sigma \leq 2$,

$$(10) \qquad V_\sigma \subset H^\sigma .$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema.

Supponiamo che Ω *sia di classe* C^2 *e che* $\vec{f} \in L^1(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^{-1/2})$ *e sia* $\vec{u}_0$ *un arbitrario elemento di* $V_\sigma\left(\frac{1}{2} < \sigma \leq 1\right)$. *Si può allora trovare* $\bar{\eta}$ *(dipendente da* $\vec{u}_0$ *e da* $\vec{f}$*), con* $0 < \bar{\eta} \leq T$, *tale che in* $[0, \bar{\eta}]$ *esista una ed una sola soluzione* $\vec{u}(\eta)$ *soddisfacente alla* (3); *risulta inoltre*

$$(11) \qquad \vec{u}(\eta) \in L^\infty(0, \bar{\eta}; V_\sigma) \cap L^2(0, \bar{\eta}; V_{\sigma+1}) \qquad \left(\frac{1}{2} < \sigma \leq 1\right).$$

L'unicità, in piccolo, è perciò garantita purché $\vec{u}_0 \in V_{(1/2)+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), mentre la soluzione gode, rispetto al dato iniziale, di proprietà di regolarità analoghe a quelle date nel teorema di esistenza di Hopf (che corrisponderebbe al caso $\sigma = 0$). In particolare, per $\sigma = 1$, se $\vec{u}_0 \in V_1$, allora $\vec{u}(\eta) \in L^\infty(0, \bar{\eta}; V_1) \cap L^2(0, \bar{\eta}; V_2) \subset L^\infty(0, \bar{\eta}; H_0^1) \cap L^2(0, \bar{\eta}; H^2)$.

Cominciamo col dimostrare il teorema di esistenza; sarà, per questo, sufficiente supporre che $\vec{f} \in L^1(0, T; L^2)$.

Tenendo presente le proprietà della successione $\{\vec{\varphi}_j\}$, indichiamo con $\vec{u}_{0,n}$ una combinazione lineare di $\vec{\varphi}_1, \cdots, \vec{\varphi}_n$ tale che

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \vec{u}_{0,n} \underset{V_\sigma}{=} \vec{u}_0 .$$

Posto poi

$$(13) \qquad \vec{u}_n(\eta) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn}(\eta) \vec{\varphi}_j ,$$

consideriamo, per il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(14) \qquad (\vec{u}'_n(\eta), \vec{\varphi}_j)_{L^2} + \mu (\vec{u}_n(\eta), \vec{\varphi}_j)_{H_0^1} + b(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \vec{\varphi}_j) = $$
$$= (\vec{f}(\eta), \vec{\varphi}_j)_{L^2} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

il problema di Cauchy

$$\vec{u}_n(0) = \vec{u}_{0,n}\,, \tag{15}$$

che, come è noto, ammette, nelle ipotesi poste, una soluzione in tutto $[0, T]$.

Moltiplichiamo le (14) per $\lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)$ e sommiamo; si ottiene, tenendo presente le (8), (9).

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^2 + \mu\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}^2 + b\left(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right) = \left(\vec{f}(\eta), \sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right)_{L^2}. \tag{16}$$

Ricordiamo che, per un teorema di immersione di Sobolev (cfr. Nikolskii [6]) si ha, per Ω tridimensionale,

$$H^s \subset L^q\,, \qquad \text{con } \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{3} > 0\,. \tag{17}$$

Risulta perciò

$$H^{1-\sigma} \subset L^{\frac{6}{2\sigma+1}} \tag{18}$$

e, di conseguenza, posto $p = \frac{12}{5-2\sigma}$, $q = \frac{6}{2\sigma+1}$ $\left(\text{in modo che } \frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$,

$$\left|b\left(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right)\right| \leq \|\vec{u}_n(\eta)\|_{L^p}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{H^{1,p}} \cdot \left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right\|_{L^q} \leq c_1\|\vec{u}_n(\eta)\|_{L^p}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{H^{1,p}}\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right\|_{H^{1-\sigma}}. \tag{19}$$

Dalla (17) si deduce inoltre

$$\begin{cases} H^s \subset L^{\frac{12}{5-2\sigma}} & \text{per } s = \dfrac{1+2\sigma}{4}\,, \\ H^r \subset H^{1,\frac{12}{5-2\sigma}} & \text{per } r = \dfrac{5+2\sigma}{4}\,. \end{cases} \tag{20}$$

Si ha poi, per la (10) e la definizione degli spazi V_σ,

$$\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right\|_{H^{1-\sigma}} \leq c_2\left\|\sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right\|_{V_{1-\sigma}} = c_2\left\|\sum_{j=1}^n \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right\|_{V_{\sigma+1}} = c_2\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}. \tag{21}$$

Dalle (19), (20), (21) segue allora

$$\left|b\left(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \sum_{j=1}^n \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta)\vec{\varphi}_j\right)\right| \leq c_3\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_s}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{s+1}}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}, \tag{22}$$

essendo

$$s = \frac{1+2\sigma}{4}. \tag{23}$$

Si ha d'altra parte, per un teorema di interpolazione degli spazi V_σ dimostrato da Baiocchi [4],

$$\|\vec{v}\|_{V_s} \leq c_4 \|\vec{v}\|_{V_\sigma}^{\frac{1+2\sigma}{4\sigma}} \|\vec{v}\|_{V_0}^{\frac{2\sigma-1}{4\sigma}}, \tag{24}$$

$$\|\vec{v}\|_{V_{s+1}} \leq c_5 \|\vec{v}\|_{V_{\sigma+1}}^{\frac{5-2\sigma}{4}} \|\vec{v}\|_{V_\sigma}^{\frac{2\sigma-1}{4}}. \tag{25}$$

Sostituendo perciò le (24), (25) nella (22) si ottiene

$$\left| b\left(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta) \vec{\varphi}_j\right)\right| \leq \tag{26}$$

$$\leq c_6 \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_0}^{\frac{2\sigma-1}{4\sigma}} \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^{\frac{2\sigma^2+\sigma+1}{4\sigma}} \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}^{\frac{9-2\sigma}{4}}.$$

Ricordiamo che, come si può facilmente provare (cfr. Hopf [1]), è

$$\operatorname*{Sup}_{\eta \in [0,T]} \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_0} \leq K_1 ; \tag{27}$$

applicando allora agli ultimi due termini a secondo membro della (26) la disuguaglianza

$$ab \leq \varepsilon\,|a|^{1+\nu} + \varepsilon^{-1/\nu}\,|b|^{1+(1/\nu)} \qquad (\nu, \varepsilon > 0), \tag{28}$$

con $\nu = \dfrac{8}{9-2\sigma} - 1$, si ottiene, per la (27),

$$\left| b\left(\vec{u}_n(\eta), \vec{u}_n(\eta), \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^\sigma \alpha_{jn}(\eta) \vec{\varphi}_j\right)\right| \leq c_6\left[\varepsilon \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}^2 + c_7 \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^{\frac{8}{2\sigma-1}}\right]. \tag{29}$$

Se quindi si assume $\varepsilon = \dfrac{\mu}{2c_6}$, risulta, sostituendo la (29) nella (16),

$$\frac{d}{d\eta}\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^2 + \mu \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_{\sigma+1}}^2 \leq c_8 \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^{\frac{8}{2\sigma-1}} + 2\|\vec{f}(\eta)\|_{L^2} \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}, \tag{30}$$

ossia anche, integrando fra 0 e η,

$$\|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma}^2 + \mu \int_0^\eta \|\vec{u}_n(t)\|_{V_{\sigma+1}}^2 dt \leq \|\vec{u}_{0,n}\|_{V_\sigma}^2 + c_8 \int_0^\eta \|\vec{u}_n(t)\|_{V_\sigma}^{\frac{8}{2\sigma-1}} dt + \tag{31}$$

$$+ 2\int_0^\eta \|\vec{f}(t)\|_{L^2} \|\vec{u}_n(t)\|_{V_\sigma} dt.$$

Dalla (31) si deduce allora (poiché c_8 non dipende da n e, per la (12), è $\|\vec{u}_{0,n}\|_{V_\sigma} \leq K_2$) che è possibile trovare un intervallo $[0, \bar{\eta}]$ nel quale si ha

$$(32) \qquad \sup_{\eta \in [0,\bar{\eta}]} \|\vec{u}_n(\eta)\|_{V_\sigma} \leq M_1 \quad , \quad \int_0^{\bar{\eta}} \|\vec{u}_n(\eta)\|^2_{V_{\sigma+1}} d\eta \leq M_2 ,$$

essendo $\bar{\eta}$, M_1, M_2 indipendenti da n.

È dunque possibile estrarre da $\{\vec{u}_n(\eta)\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{\vec{u}_n(\eta)\}$) tale che risulti

$$(33) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* \vec{u}_n(\eta) \underset{L^\infty(0,\bar{\eta};V_\sigma)}{=} \vec{u}(\eta)$$

$$(34) \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* \vec{u}_n(\eta) \underset{L^2(0,\bar{\eta};V_{\sigma+1})}{=} \vec{u}(\eta) \text{ (1)}.$$

Ripetendo, senza alcuna modificazione, il procedimento di Hopf, si dimostra poi che la funzione limite $\vec{u}(\eta)$, che, per le (33), (34), $\in L^\infty(0, \bar{\eta}; V_\sigma) \cap L^2(0, \bar{\eta}; V_{\sigma+1})$, è una soluzione del sistema di Navier–Stokes soddisfacente alla (3).

Il teorema di esistenza è perciò provato.

Dimostriamo ora il teorema di unicità.

Faremo, per questo, vedere che la soluzione $\vec{u}(\eta)$, di cui abbiamo dimostrato l'esistenza, soddisfa in $[0, \bar{\eta}]$ la (4) con $p = 5$, verificando così il teorema di unicità di Prodi.

Osserviamo anzitutto che si ha, per la (11),

$$(35) \qquad \vec{u}(\eta) \in L^\infty(0, \bar{\eta}; V_{1/2}) \cap L^2(0, \bar{\eta}; V_{3/2}).$$

Risulta inoltre, per la (17),

$$(36) \qquad |b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|_{L^3} \|\vec{u}\|_{H^{1,3}} \|\vec{v}\|_{L^3} \leq c_9 \|\vec{u}\|_{H^{1/2}} \|\vec{u}\|_{H^{3/2}} \|\vec{v}\|_{H^{1/2}} .$$

È perciò definito un operatore (non lineare) B tale che

$$(37) \qquad B\vec{u} \in V_{-1/2} = V'_{1/2} \quad \forall \vec{u} \in V_{3/2} \quad ; \quad b(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \langle B\vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V_{1/2} .$$

In modo analogo, si può definire (utilizzando, in luogo della (36), la relazione

$$(38) \qquad |(\vec{u}, \vec{v})_{H_0^1}| \leq c_{10} \|\vec{u}\|_{V_{3/2}} \|\vec{u}\|_{V_{1/2}})$$

un operatore lineare A tale che

$$(39) \qquad A\vec{u} \in V_{-1/2} \quad \forall \vec{u} \in V_{3/2} \quad ; \quad (\vec{u}, \vec{v})_{H_0^1} = \langle A\vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V_{1/2} .$$

(1) Il limite (33) va inteso nella topologia debole *; il limite (34) nella topologia debole.

Il sistema di Navier–Stokes può allora scriversi, nel senso delle distribuzioni, in forma « forte »

$$\vec{u}'(\eta) + \mu\, A\vec{u}(\eta) + B\vec{u}(\eta) = \vec{f}(\eta)\,. \tag{40}$$

Per l'ipotesi fatta su $\vec{f}$ e le (35), (37), (39) risulta quindi

$$\vec{u}' \in L^2(0\,,\bar{\eta}\,;V_{-1/2})\,, \tag{41}$$

cioè

$$\vec{u} \in H^1(0\,,\bar{\eta}\,;V_{-1/2})\,. \tag{42}$$

Dalle (35), (42) si deduce allora

$$\vec{u} \in H^1(0\,,\bar{\eta}\,;V_{-1/2}) \cap L^2(0\,,\bar{\eta}\,;V_{3/2}), \tag{43}$$

da cui segue, per un teorema di interpolazione di Lions [7] ed una proprietà di interpolazione degli spazi V_σ data da Baiocchi [4],

$$\vec{u} \in H^{\vartheta}(0\,,\bar{\eta}\,;[V_{-1/2}\,,V_{3/2}]_{1-\vartheta}), \tag{44}$$

ossia, assunto $\vartheta = 3/10$,

$$\vec{u} \in H^{3/10}(0\,,\bar{\eta}\,;V_{9/10})\,. \tag{45}$$

Per i teoremi di immersione già citati, si ha allora, posto $Q = \Omega \times [0\,,\bar{\eta}]$

$$\vec{u} \in L^5(Q)\,, \tag{46}$$

cioè la (4) con $p = 5$.

Il teorema è perciò completamente dimostrato.

Osservazione. – Se si suppone che siano verificate sia le ipotesi dal teorema precedente con $\sigma = 1$, sia quelle del teorema di Kieselev e Ladyzenskaja, cioè se Ω è di classe C^2, $\vec{u}_0 \in N^1 \cap H^2$, $\vec{f} \in H^1(0\,,T\,;L^2)$, allora esiste una ed una sola funzione $\vec{u}(x\,,\eta)$ soddisfacente alla (3) ed al sistema di Navier–Stokes *quasi ovunque in* Q.

Osserviamo infatti che, nelle ipotesi poste, risulta, per le (5), (11)

$$\vec{u}(\eta) \in L^\infty(0,\bar{\eta};H_0^1) \cap L^2(0,\bar{\eta};H^2) \quad , \quad \vec{u}'(\eta) \in L^\infty(0,\bar{\eta};L^2) \cap L^2(0,\bar{\eta};H_0^1)\,. \tag{47}$$

Di conseguenza

$$\vec{u} \in L^\infty(0\,,\bar{\eta}\,;L^6) \quad , \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \in L^2(0\,,\bar{\eta}\,;H^1) \subset L^2(0\,,\bar{\eta}\,;L^6). \tag{48}$$

Si ha perciò, per le (47), (48),

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} - \mu\,\Delta\vec{u} + (\vec{u}\,\mathrm{grad})\,\vec{u} - \vec{f} \in L^2(Q)\,. \tag{49}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. HOPF, *Ueber die Anfangswertaufgabe für die hydrodinamischen Grundgleichungen* «Math. Nachr.», *4* (1951).

[2] G. PRODI, *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier–Stokes*, «Ann. di Mat.», *48* (1959).

[3] A. A. KIESELEV e D. A. LADYZENSKAJA, *Sull'esistenza ed unicità della soluzione del problema non stazionario per un fluido viscoso incompressibile* (in russo), «Isv. Akad. Nauk», *21* (1957).

[4] C. BAIOCCHI, *Sulle soluzioni del sistema di Navier–Stokes in dimensione n*, Note I, II, III, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *40–41* (1966).

[5] L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, «Comm. Pure and Appl. Math.», *8* (1955).

[6] S. M. NIKOLSKII, *On embedding, extension and approximation of differentiable functions* (in russo), «Uspeki Mat. Nauk», *16* (1961).

[7] J. L. LIONS, *Espaces intérmediaires entre espaces hilbertiens et applications*, «Bull. Soc. Math. Phys. Roumanie», *50* (1958).