Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Pastori

Su alcune forze a potenza nulla della Meccanica analitica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 146–151.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_146_0>

Meccanica. — *Su alcune forze a potenza nulla della Meccanica analitica.* Nota (*) del Corrisp. MARIA PASTORI.

SUMMARY. — In this paper we are considering, in analytical Mechanics, the extensions of two workless forces of the classical Mechanics.

The former, extending the Coriolis force, can be interpreted as a "fictitious force" for an holonomic system with moving constraints.

The latter, extending the reaction of constraint for a body which rolls without sliding, is determined by Volterra's "non-holonomic terms".

1. INTRODUZIONE. – Fra le forze della Meccanica classica che non lavorano ce ne sono due per le quali questo risultato negativo è meno immediato che negli altri casi: sono la forza di Coriolis e la reazione vincolare per un corpo che rotola senza strisciare. La prima è una forza apparente, introdotta solo quando si usa un riferimento non inerziale, e l'annullarsi della sua potenza dipende dalla espressione di tale forza che contiene il prodotto vettore della velocità relativa per la velocità angolare; la seconda è una forza reattiva di un vincolo (in generale di anolonomia) che non può essere perfettamente liscio se deve permettere un rotolamento puro; tale forza non è quindi normale all'appoggio, come per vincoli lisci, né applicata a un punto fisso, bensì a un punto che, pur variando da istante a istante, ha in ogni istante velocità nulla, ed è per questo che la potenza si annulla anche per la parte tangenziale della reazione.

Osservo in questa Nota che le due forze trovano le loro estensioni nella Meccanica analitica: di un sistema olonomo con vincoli mobili la prima, di un sistema anolonomo la seconda.

Per il moto di un sistema olonomo con vincoli fissi la Meccanica analitica offre la nota immagine di un punto che si muove in una varietà riemanniana (spazio delle configurazioni), la cui metrica è individuata dall'energia cinetica del sistema. Quando i vincoli sono mobili questa immagine viene meno. Ma si può ancora conservarla, considerando lo spazio delle configurazioni (in generale mobile e deformabile) individuato dalla sola parte quadratica omogenea dell'energia cinetica e interpretando i termini aggiuntivi che entrano nelle equazioni di Lagrange come individuanti sollecitazioni da aggiungere a quella attiva e che possono chiamarsi «apparenti» perché godono delle proprietà caratteristiche delle forze apparenti della Meccanica classica. Una di queste forze è analoga a quella di Coriolis ed è appunto a potenza nulla.

Per la seconda forza a potenza nulla, che interviene nella Meccanica analitica dei sistemi anolonomi, valgono le considerazioni seguenti. Se in un sistema olonomo a vincoli fissi, si introducono ulteriori vincoli di anolo-

(*) Presentata nella seduta dell'11 febbraio 1967.

nomia (pure fissi), è possibile riferire lo spazio delle configurazioni a un sistema di congruenze di linee, le cui direzioni in ogni punto si scompongono in due parti: quella introdotta dai vincoli di anolonomia individuanti lo spazio tangente « proibito » (nel quale non può entrare la velocità del punto rappresentativo) e la parte complementare individuante lo spazio « permesso ». Le equazioni di movimento (equazioni del Maggi) rappresentano le proiezioni delle equazioni di Lagrange secondo le direzioni dello spazio permesso. I primi membri di queste equazioni sono state scomposte dal Volterra in due termini: uno di essi (termine di anolonomia) può appunto interpretarsi come proveniente da una forza a potenza nulla da aggiungere a quella attiva. Questa forza dipende in modo essenziale dalla natura dei vincoli di anolonomia introdotti, i quali, nella rappresentazione geometrica considerata, individuano congruenze di linee che *non* sono normali.

2. ESTENSIONE DELLA FORZA DI CORIOLIS. – Consideriamo da prima un sistema olonomo a vincoli fissi ad n gradi di libertà riferito a coordinate libere $q^1, q^2, \cdots, q^n$. Come è noto il movimento del sistema ha per immagine quello di un punto vincolato ad una varietà riemanniana ad n dimensioni $\mathfrak{V}_n$ (spazio delle configurazioni) la cui metrica è individuata dall'energia cinetica T secondo la formola:

$$ds^2 = 2\,\mathrm{T}\,dt^2 = a_{hk}\,dq^h\,dq^k \qquad (h\,,k\cdots = 1\,,2\,,\cdots,n) \tag{1}$$

con a_{hk} funzioni delle q. Le equazioni di moto del punto rappresentativo possono scriversi in diverse forme. Ne ricordiamo due:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^k} = \mathrm{Q}_k \tag{2}$$

$$a_{hk}\,\ddot{q}^h + [ih\,,k]\,\dot{q}^i\,\dot{q}^h = \mathrm{Q}_k \tag{3}$$

dove Q_k sono le componenti covarianti in $\mathfrak{V}_n$ della sollecitazione attiva, $[ih\,,k]$ i simboli di Christoffel di prima specie relativi alla metrica (1) e il punto indica derivazione rispetto al tempo. La (2) è la classica forma delle equazioni di Lagrange ed è valida per ogni sistema olonomo a vincoli fissi o mobili; la (3) è valida solo per vincoli fissi.

Sia ora un sistema olonomo a vincoli mobili. L'energia cinetica non è più, come nel caso di vincoli fissi, una forma quadratica omogenea nelle $\dot{q}$; ma risulta formata da tre termini:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_0 \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\,a_{hk}\,\dot{q}^h\,\dot{q}^k \\ \mathrm{T}_1 = a_k\,\dot{q}^k \\ \mathrm{T}_0 = \frac{1}{2}\,a \end{cases} \tag{4}$$

dove i vari coefficienti $a_{hk}\,, a_k\,, a$ sono funzioni delle q e in generale anche del tempo. Pensiamo il moto del sistema rappresentato da quello di un punto vincolato alla $\mathcal{V}_n$ (in generale mobile e deformabile) individuata dalla sola parte quadratica omogenea dell'energia cinetica, cioè di metrica:

$$ds^2 = 2\,T_2\,dt^2 = a_{hk}\,dq^h\,dq^k. \tag{1'}$$

Per le equazioni di moto di questo punto non potremo più prendere le (3), bensì le (2) che sono sempre valide. Applicando l'operatore di Lagrange ai vari termini delle (4) e lasciando nel primo membro quella parte che formalmente coincide col primo membro delle (3) otteniamo:

$$a_{hk}\,\ddot{q}^h + [ih\,,k]\,\dot{q}^i\,\dot{q}^h = Q_k + Q'_k + Q''_k + Q'''_k \tag{5}$$

dove si è posto:

$$\left\{\begin{aligned} Q'_k &= (a_{h|k} - a_{k|h})\,\dot{q}^h \\ Q''_k &= \frac{1}{2}\,a_{|k} - \frac{\partial a_k}{\partial t} \text{ (1)} \\ Q'''_k &= -\frac{\partial a_{hk}}{\partial t}\,\dot{q}^h. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Si potrà dunque dare alle equazioni di moto del punto in $\mathcal{V}_n$ la forma propria dei vincoli fissi pur di aggiungere alla sollecitazione attiva le (6). Queste ultime hanno le stesse dimensioni della sollecitazione attiva, non ubbidiscono alla legge dell'azione e reazione perché non sono né forze attive, né reazioni vincolari (essendo «pure» le equazioni di Lagrange) e possono eliminarsi ripristinando la forma primitiva (2) delle equazioni di Lagrange. Soddisfano dunque alle proprietà caratteristiche delle forze apparenti della Meccanica analitica e possono quindi chiamarsi ancora «apparenti» (2). La prima delle (6) è a potenza nulla rispetto alla velocità relativa a $\mathcal{V}_n$ (di componenti $\dot{q}^k$); per l'emisimmetria delle espressioni tra parentesi si ha infatti $Q'_k\,\dot{q}^k = 0$. Questa forza è una estensione di quella di Coriolis e per un sistema a tre gradi di libertà è rappresentata dal vettore $\vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{A}$ con $\vec{v}$ velocità relativa ed $\vec{A}$ vettore di $\mathcal{V}_n$ di componenti a_k (3).

Se l'energia cinetica del sistema è stazionaria, se cioè, pur essendo presenti i tre termini (4), i loro coefficienti non dipendono dal tempo, si annulla Q'''_k e il secondo termine di Q''_k e la «sollecitazione apparente» coincide formalmente per una $\mathcal{V}_3$ (e salvo naturalmente un coefficiente di ragguaglio) col sistema delle forze ponderomotrici di un campo elettromagnetico stazionario di cui a_k è il potenziale vettore ed $\frac{1}{2}\,a$ il potenziale scalare.

(1) Con la sbarretta si indica derivazione parziale ordinaria, che però in queste formole potrebbe anche essere sostituita da derivazione covariante.

(2) Cfr. M. PASTORI, *Forze apparenti della Meccanica analitica*, in corso di pubblicazione sulla Rivista «Meccanica».

(3) M. PASTORI, loco cit. Naturalmente essa diventa la classica forza di Coriolis quando le equazioni di Lagrange, anziché riguardare un sistema olonomo, riguardano un punto con coordinate relative a un riferimento non inerziale.

3. FORZA RAPPRESENTATA DAI TERMINI DI ANOLONOMIA. – Torniamo a considerare un sistema olonomo con vincoli fissi e introduciamo nella $\mathcal{V}_n$ di metrica (1) dei vincoli di anolonomia (fissi) mediante le equazioni

$$(7) \qquad \underset{h}{b_j}\, \dot{q}^j = 0 \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \cdots, n \\ h = 1, 2, \cdots, m < n \end{pmatrix}.$$

Queste equazioni permettono di esprimere le $\dot{q}$ per mezzo di un numero $\nu = n - m$ di parametri indipendenti (caratteristiche cinetiche) e^α. Si ha quindi:

$$(8) \qquad \dot{q}^j = \eta^j{}_\alpha\, e^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, \nu).$$

Le equazioni di movimento diventano allora le equazioni del Maggi (4):

$$(9) \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k}\right)\eta^k{}_\alpha = \Phi_\alpha \qquad (9') \quad \Phi_\alpha = \eta^k{}_\alpha\, Q_k$$

cui vanno aggiunte le (7).

I primi membri di queste equazioni sono state scomposte dal Volterra (5) in due termini Ω_α ed A_α chiamati rispettivamente di olonomia e di anolonomia:

$$(10) \qquad \begin{cases} \Omega_\alpha = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial e^\alpha} - \dfrac{\partial T}{\partial q^h}\dfrac{\partial \dot{q}^h}{\partial e^\alpha} \\[2ex] A_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^h}\left(\dfrac{\partial \dot{q}^h}{\partial q^j}\dfrac{\partial \dot{q}^j}{\partial e^\alpha} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \dot{q}^h}{\partial e^\alpha}\right). \end{cases}$$

In Ω_α la T è considerata funzione delle q e delle e perché si pensano eliminate le $\dot{q}$ per mezzo delle (8). Quanto ad A_α, per le (8) esso diviene:

$$(11) \qquad A_\alpha = a_{hk}\, \dot{q}^k \left(\frac{\partial \eta^h{}_\beta}{\partial q^j}\, \eta^j{}_\alpha - \frac{\partial \eta^h{}_\alpha}{\partial q^j}\, \eta^j{}_\beta\right) e^\beta.$$

Questo termine, cambiato di segno, può considerarsi come rappresentante una forza da aggiungere a quella attiva, la cui presenza è dovuta solo alla natura dei vincoli di anolonomia che si manifesta nella espressione entro parentesi. Tale espressione è emisimmetrica rispetto ai due indici α e β e ciò assicura che la sua potenza è sempre nulla ($\Phi_\alpha e^\alpha = 0$) (6). Per precisare il significato dei termini entro parentesi, giova introdurre nella $\mathcal{V}_n$ una n-pla di congruenze ortogonali $\underset{k}{\lambda^j}$ ($j, k = 1, 2, \cdots n$), scomponendo in ogni punto

(4) G. A. MAGGI, *Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica applicabili ai sistemi anolonomi*, Questi « Rend. », ser. V, *10* 287–292 (1901); oppure: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, parte I, cap. V, Bologna (1926).

(5) VOLTERRA, *Sopra una classe di equazioni dinamiche*, « Atti della Acc. delle Scienze di Torino », *33*, 3–27 (1897–98); oppure T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit.

(6) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit.

le corrispondenti direzioni in due gruppi (7): *a*) quello dello spazio tangente « proibito » (E_m) che viene individuato dai vincoli di anolonomia (7) previamente ortonormalizzati; in esso la velocità del punto rappresentativo non può entrare; *b*) quello dello spazio tangente complementare (E_ν) e quindi « permesso ». Le equazioni del Maggi (9) rappresentano allora le proiezioni delle equazioni di Lagrange sulle ν direzioni $\underset{\alpha}{\lambda}^j$ ($\alpha = 1, 2, \cdots, \nu$) dello spazio permesso. L'espressione tra parentesi in (11) diviene:

$$(12) \qquad \underset{\beta\alpha}{A}^h = -\underset{\alpha\beta}{A}^h = \frac{\partial \underset{\beta}{\lambda}^h}{\partial q^j} \underset{\alpha}{\lambda}^j - \frac{\partial \underset{\alpha}{\lambda}^h}{\partial q^j} \underset{\beta}{\lambda}^j .$$

Tenendo conto delle formole per le derivate covarianti delle $\underset{\beta}{\lambda}^h$ e del loro legame coi coefficienti di rotazione di Ricci $\gamma_{\beta rs}$ si trova:

$$\frac{\partial \underset{\beta}{\lambda}^h}{\partial q^j} \underset{\alpha}{\lambda}^j = -\gamma_{r\beta\alpha} \underset{r}{\lambda}^h - \left\{ {h \atop lj} \right\} \underset{\beta}{\lambda}^l \underset{\alpha}{\lambda}^j \text{ (8)}$$

dove r deve supporsi diverso da β se si vuole che non si annulli il corrispondente coefficiente di rotazione; scambiando gli indici α e β si trova l'espressione per il secondo termine della (12) nel quale si dovrà supporre invece r diverso da α. Sostituendo nella (12) si ha infine:

$$(13) \qquad \underset{\beta\alpha}{A}^h = -(\gamma_{r\beta\alpha} - \gamma_{r\alpha\beta}) \underset{r}{\lambda}^h .$$

L'espressione tra parentesi si annulla quando la congruenza r–ma è normale (9); ma r è un indice qualunque diverso da α e da β, cioè l'indice di una congruenza dello spazio proibito individuato dai vincoli (7). Questo prova che A_α è presente solo perché le congruenze individuate da tali vincoli *non* sono normali.

Se esse fossero normali, A_α si annullerebbe, ma i vincoli (7) sarebbero allora solo in apparenza di anolonomia (il corrispondente sistema differenziale risulterebbe completamente integrabile); il punto rappresentativo si muoverebbe nella intersezione di m ipersuperficie normali a tali congruenze e cioè in una $\mathcal{V}_{n-m}$ ($= \mathcal{V}_\nu$) che sarebbe il nuovo spazio delle configurazioni. D'altra parte, introducendo nella $\mathcal{V}_\nu$ nuove coordinate libere r^α, si avrebbe, in luogo della (8):

$$(8') \qquad \dot{q}^j = \frac{\partial q^j}{\partial r^\alpha} \dot{r}^\alpha .$$

(7) E. UDESCHINI BRINIS, *Sul significato delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi per sistemi anolonomi*, Questi « Rend. », ser. VIII, *35*, 303–311 (1963). Vedi anche M. PASTORI, *Visioni geometriche in Meccanica analitica*, « Rend. del Sem. Mat. e Fisico di Milano », *36*, 3–22 (1966).

(8) Qui è sottintesa la sommatoria anche rispetto all'indice di invarianza r (variabile da 1 ad n) contenuto nei coefficienti di rotazione e nei versori delle congruenze.

(9) Cfr. ad esempio T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma (1925), p. 292.

La metrica di $\mathfrak{V}_n$ si ridurrebbe alla metrica di $\mathfrak{V}_\nu$

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\, dr^\alpha\, dr^\beta \qquad \text{con} \qquad a_{\alpha\beta} = a_{hk} \frac{\partial q^h}{\partial r^\alpha} \frac{\partial q^k}{\partial r^\beta}$$

e i termini di olonomia diventerebbero, come si verifica per le (8′) e come del resto è già stato osservato [10], i primi membri delle equazioni di Lagrange nelle nuove coordinate libere.

(10) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit.