Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Serghei L. Sobolev

Sur une classe des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 133–137.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_133_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 febbraio 1967

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sur une classe des fonctions de plusieurs variables indépendantes.* Nota [(*)] del Socio straniero SERGHEI L. SOBOLEV.

RIASSUNTO. — In questa Nota si considerano classi di funzioni di più variabili reali indipendenti che generalizzano quella di Gevrey e restano invarianti nelle trasformazioni reali ortogonali delle variabili stesse. Si trova che fanno parte della classe considerata alcune di funzioni intere, di funzioni analitiche con raggio finito di convergenza della relativa serie di Taylor, nonché di funzioni quasi analitiche.

Nous considérons dans la présente Note des classes des fonctions de plusieurs variables indépendantes qui généralisent les classes de Gevrey et qui restent invariants par rapport aux transformations réelles orthogonales de ses arguments. On sait que pour une variable indépendante ces classes contiennent quelques classes des fonctions entières, des fonctions analytiques avec un rayon fini de convergence des séries de Taylor à chaque point, ainsi que quelques classes des fonctions quasi-analytiques et non quasi-analytiques.

Le même est vrai pour les classes que nous considérons ici.

Convenons d'indiquer comme il est d'habitude maintenant le vecteur des variables indépendantes par

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1966.

et soit α un vecteur aux composants entiers non négatifs:

(2) $$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \quad ; \quad \alpha_j \geq 0 \quad ; \quad \alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n = |\alpha|$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad ; \quad \alpha! = \alpha_1!\, \alpha_2! \cdots \alpha_n! \quad ; \quad \alpha^\alpha = \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_\alpha^{\alpha_n}.$$

Soit $\Phi(\alpha)$ une fonction de α. Nous désignos par

$$\overset{*}{\sum} \Phi(\alpha) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\sum_{|\alpha|=m}} \Phi(\alpha)$$

les sommes de toutes les valeurs de $\Phi(\alpha)$ et *rcp.* de toutes les valeurs de α pour lesquelles $|\alpha| = m$.

Par

$$\Sigma\, \Phi(\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{|\alpha|=m} \Phi(\alpha)$$

soient indiquées les sommes:

(3) $$\Sigma\, \Phi(\alpha) = \overset{*}{\sum} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \Phi(\alpha) \quad \text{et} \quad \sum_{|\alpha|=m} \Phi(\alpha) = \overset{*}{\sum_{|\alpha|=m}} \frac{m!}{\alpha!} \Phi(\alpha).$$

Lemme I. Soit $\Phi_m(x) = \overset{*}{\sum_{|\alpha|=m}} a_\alpha x^\alpha$ *et soit pour tous les* z *complexes:* $z_k = x_k + i x'_k$ *la forme* $\Phi_m(Z)$ *satisfait à l'inégalité:*

(4) $$|\Phi_m(z)| \leq C\, |z|^m$$

où $|z|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$.

Alors les coefficients de cette forme satisfont à l'inégalité:

(5) $$|a_\alpha| \leq C \alpha^{-\alpha/2} m^{m/2}.$$

Preuve. Le coefficient a_α s'exprime au moyen de la formule de Cauchy:

(6) $$a_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1}\int_{C_2} \cdots \int_{C_n} \frac{\Phi_m(z)\, dz}{z^\alpha \cdot z}$$

où $C_1 C_2 \cdots C_n$ est un système de circonférences $|z_j| = \theta_j$.

Prenons θ_j de la sorte que

(7) $$\Sigma \theta_j^2 = 1.$$

En évaluant le second membre de (6) et en tenant compte que

(8) $$\min_{\Sigma\theta_j^2 = 1} \frac{1}{\theta^\alpha} = \frac{m^{m/2}}{\alpha^{\alpha/2}}$$

on obtient aisément la formule (5) c.q.f.d.

De la formule de Stirling il s'ensuit que:

(9) $$\frac{k_1}{m^{(n-1)/2}} \leq \frac{\alpha^\alpha}{\alpha\,!}\,\frac{m\,!}{m^m} \leq k_2\,.$$

Donc de (5) on peut obtenir:

(10) $$|\,a_\alpha\,| \leq \sqrt{k m^{(n-1)/2}\,\frac{n\,!}{\alpha\,!}}\;\mathrm{C}\,.$$

Lemme II. Soit les coefficients de la forme $\Phi_m(x)$ *satisfont aux inégalités*

(11) $$|\,a_\alpha\,| \leq \mathrm{C}_1\sqrt{\frac{m\,!}{\alpha\,!}}$$

alors pour chaque z *complexe l'evaluation suivante a lieu:*

(12) $$|\,\Phi_m(z)\,| \leq \mathrm{C}_1\, r^m \sqrt{\frac{m+1}{1}\;\frac{m+2}{2}\cdots\frac{m+n}{n}}\,.$$

Preuve. Nous avons grâce à l'inégalité de Cauchy:

(13) $$|\,\Phi_m(z)\,| = \left|\sum_{|\alpha|=m}^{*} a_\alpha z^\alpha\right| \leq \left\{\sum_{|\alpha|=m}^{*} |\,a_\alpha\,|^2\,\frac{\alpha\,!}{m\,!}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|\alpha|=m}^{*} |\,z\,|^{2\alpha}\,\frac{m\,!}{\alpha\,!}\right\}^{1/2}.$$

En tenant compte que:

(14) $$\sum_{|\alpha|=m}^{*} |\,z\,|^{2\alpha}\,\frac{m\,!}{\alpha\,!} = \sum_{|\alpha|=m} |\,z\,|^{2\alpha} = \left\{\sum_{j=1}^{n} |\,z_j\,|^2\right\}^m = r^{2m}$$

et

(15) $$\sum^{*} |\,a_\alpha\,|^2\,\frac{\alpha\,!}{m\,!} \leq \sum^{*} \mathrm{C}_1^2 = \mathrm{C}_1^2\,\frac{(n+m)\,!}{n\,!\,m\,!}$$

on obtient de (13) l'inégalité cherchée. Lemme est démontré.

Remarqons maintenant que l'expression $\mathrm{P}_n(m) = \dfrac{(n+m)\,!}{n\,!\,m\,!}$ est un polynome de m du degré n et donc croit plus lentement que chaque fonction exponentielle de m.

Soit la classe $\mathrm{R}^*(\nu\,,\mathrm{A})$ est constituée des fonctions φ, données dans un domaine compact Ω satisfaisantes dans ce domaine à la condition:

(16) $$|\,\mathrm{D}^\alpha\varphi\,| \leq k\sqrt{\alpha\,!}\,\sqrt{m\,!}\,m^{\nu m}\,\mathrm{A}^m\,.$$

Posons ensuite

(17) $$\mathrm{R}(\nu\,,\mathrm{A}) = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{R}^*(\nu\,,\mathrm{A}+\varepsilon)$$

Théorème. La classe $\mathrm{R}(\nu\,,\mathrm{A})$ *des fonctions* φ *reste invariante par rapport à toutes transformations réelles orthogonales des variables indépendantes.*

Preuve. Remarquons d'abord que les transformations réelles orthogonales conservent l'expression $|\,z\,|^2$ car pour chaque matrice H réelle telle que $\mathrm{H}\,\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^*\mathrm{H} = \mathrm{I}$

$$\sum_{j=1}^{n} |\,\mathrm{H}z\,|_j^2 = (\overline{\mathrm{H}z})^*\,\mathrm{H}z = \bar{z}^*\,\mathrm{H}^*\,\mathrm{H}z = \sum_{j=1}^{n} z_j^2\,.$$

Considérons maintenant la forme:

$$\Phi_m(x) = \sum_{|\alpha|=m}^{*} D^\alpha \varphi(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} . \tag{18}$$

Cette forme est la somme de tous les membres de la série de Taylor de la fonction φ qui sont d'ordre m. Par la transformation

$$\varphi(Hy) = \psi(y)$$

la forme $\Phi_m(x)$ sera remplacée par $\Psi_m(y)$

$$\Psi_m(y) = \Phi_m(Hy) . \tag{19}$$

En se servant successivament des lemmes I et II appliqués à $\Psi_m(y)$ et $\Phi_m(x)$ on obtient:

$$\Psi_m(x) \leq r^m C P_n(m) m^{\nu m} A^m \tag{20}$$

où $P_n(m)$ est un polynome du degré n.

En se servant de cette considération on déduit que de l'inégalité

$$| D^\alpha \varphi(0) | \leq C_1 \sqrt{\alpha!} \sqrt{m!} \, m^{\nu m} (A + \varepsilon)^m$$

suit:

$$| D^\alpha \psi(0) | \leq C_1 \sqrt{\alpha!} \sqrt{m!} \, m^{\nu m} (A + 2\varepsilon)^m .$$

Donc de la relation

$$\varphi \in \bigcap_{\varepsilon>0} R^*(\nu, A + \varepsilon)$$

on conclut que

$$\psi \in \bigcap_{\varepsilon>0} R^*(\nu, A + 2\varepsilon)$$

d'où il suit le theorème.

Pour $-1 < \nu < 0$ les classes $R(\nu, A)$ sont des classes des fonctions entières satisfaisantes à la condition:

$$| \varphi(z) | \leq k e^{B\tau\varrho} \tag{22}$$

où B et ρ sont liés avec A et ν par les formules

$$\rho = -\frac{1}{\nu} \quad , \quad B = -\frac{\nu}{e} A^{-1/\nu} \tag{23}$$

où

$$\nu = -\frac{1}{\rho} \quad ; \quad A = (\rho B e)^{1/\varrho} . \tag{24}$$

La preuve est basée aussi sur les lemmes I et II.

Il est utile de considérer la classe $R^*(\nu, A)$ comme un espace dénombrablement normé aux normes:

$$\| \varphi \|_{L_2^{(m)}} = \left\{ \int \sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha \varphi)^2 \, dx \right\}^{1/2} \tag{25}$$

Alors on a pour $\varphi \in R^*(\nu, A)$:

$$\| \varphi \|_{L_2^{(m)}} \leq k m^{\nu m} m! (A + \varepsilon)^m. \tag{26}$$

Les inégalités (26) permettent d'obtenir l'estimation de la vitesse de convergence des formules de l'intégration pour l'intégrale $\int_\Omega \varphi(x)\, dx$ de la sorte:

$$\int_\Omega \varphi(x)\, dx \cong \sum_{k=1}^{N} C_k \varphi(x^{(k)}) \tag{27}$$

quand les noeuds $x^{(k)}$ sont des points d'un certain réseau défini par la matrice H à déterminant 1.

$$x^\gamma = h H \gamma \quad ; \quad | H | = 1 \tag{28}$$

et la fonction $\varphi(x)$ est périodique

La norme de la fonctionelle d'erreur:

$$l(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \Sigma C_\gamma \delta(x - h H_\gamma) \tag{29}$$

s'exprime alors [1]:

$$\| l(x) \|_{L_2^{(m)*}} = \sqrt{|\Omega|} \left(\frac{h}{2\pi}\right)^m \sqrt{\zeta(H^{-1} | 2m)} \,. \tag{30}$$

Par $\zeta(H^{-1} | 2m)$ est désignée la fonction

$$\zeta(H^{-1} | s) = \sum_\gamma \frac{1}{r_\gamma^s} \tag{31}$$

où r_γ est la distance de l'origine d'un point $H^{-1*}\gamma$ du réseau adjoint, ayant matrice H^{-1}. Asymptotiquement pour m assez grand

$$\| l \|_{L_2^{(m)*}} = k \left(\frac{h}{2\pi r_{\min}}\right)^m . \tag{32}$$

Des formules (26) et (32) il suit:

$$| (l, \varphi) | \leq k m^{(\nu+1)m} \left(\frac{(A+\varepsilon) h}{2\pi e r_{\min}}\right)^m . \tag{33}$$

Si l'on prend la meilleure estimation qui correspond à

$$m = e \left(\frac{(A+\varepsilon) h}{2\pi e r_{\min}}\right)^{-1/(\nu+1)}$$

on obtient:

$$| (l, \varphi) | \leq k e^{-(\nu+1)/e} \left(\frac{2\pi e \cdot r_{\min}}{(A+\varepsilon) h}\right)^{1/(\nu+1)} . \tag{34}$$

La convergence est donc exponentielle.

(1) S. L. SOBOLEV, *DAN*, 1965, t. 162, n. 6.