Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Reuven R. Rottenberg

Surfaces planaires et congruences P. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.1, p. 28–34.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_28_0>

Geometria. — *Surfaces planaires et congruences* P. Nota I di Reuven R. Rottenberg (*), presentata (**) dal Socio B. Segre.

Sunto. — In questa Nota ed in una successiva Nota II vengono studiate le superficie Σ di un S_3 reale alle quali possono venire associati ∞^2 piani non di una stella, sì che Σ possa rappresentarsi su di un piano π in guisa che le sezioni di Σ con quei piani abbiano per margini su π delle rette.

I. – Introduction.

Dans un article précédent [1] (1), nous avons défini une congruence planaire sur une surface située dans un espace projectif réel S_3: c'est une famille (∞^2) de courbes planes qui correspondent, dans une application d'un plan sur la surface, aux lignes droites de ce plan. Nous avons, en outre, montré qu'une gerbe de courbes planes sur une surface (sections de la surface par une gerbe de plans) est une congruence planaire que nous avons appelée congruence triviale.

Dans la présente étude, nous considérons des surfaces « planaires »: ce sont des surfaces possédant une congruence planaire non–triviale dite « congruence P ». Une quadrique propre réglée n'est pas une telle surface. Par contre, les surfaces quartiques de Steiner, les surfaces cubiques réglées, la surface tétrahédrale et le cône du second degré sont des exemples de surfaces planaires, et nous étudions en détail les congruences P sur ces surfaces.

Dans ce qui suit: (x_1, x_2, x_3, x_4) désignent les coordonnées homogènes d'un point de l'espace S_3; (u, v) paramètres sur une surface Σ de S_3 sont aussi des coordonnées non–homogènes d'un plan affine réel π; pour les autres notations et définitions, voir [1].

II. – Congruences P et surfaces planaires.

Definitions. Une congruence planaire sur une portion de surface Σ sera appelée « congruence P » sur Σ si elle n'est pas triviale. Nous dirons qu'une surface Σ est « planaire », ou encore « surface P » si elle possède une congruence P.

(*) Cet article contient une seconde partie de la thèse de doctorat faite sous la direction de Prof. A. Evyatar, et soumise au Technion, Israel Institute of Technology. Cette thèse est le résultat de suggestions faites par le Prof. B. Segre à qui l'auteur exprime ses remerciements.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

(1) Per la bibliografia ved. Nota II.

Nous verrons plus loin qu'une surface planaire peut posséder une infinité de congruences P distinctes; toutefois le théorème suivant nous montre qu'il existe des surfaces non planaires.

THÉORÈME 1. – *Une quadrique propre réglée n'est pas une surface* P; *et donc, les seules congruences planaires sur cette surface sont les congruences triviales (gerbes).*

Démonstration. – Supposons qu'une quadrique propre Q_1 à génératrices réelles possède une congruence P. En vertu du Corollaire 2 de [1], les deux systèmes de génératrices rectilignes de Q_1 appartiennent à cette congruence et on peut choisir la représentation planaire, définissant celle-ci, de façon à ce que ces génératrices soient les $u =$ const. et $v =$ const. respectivement.

Soient maintenant Q_2 une seconde quadrique réglée (qui peut coincider avec Q_1) et G une congruence triviale (gerbe) sur Q_2. Par le même Corollaire, cette congruence contient les deux systèmes de génératrices qui seront les $\bar{u} =$ const. et $\bar{v} =$ const. dans une représentation planaire correspondante. Par le théorème 5 de [1], il existe une correspondance F: $Q_1 \rightarrow Q_2$ qui applique la congruence P de Q_1 sur la gerbe G de Q_2, et qui fait correspondre à un point donné (u_0, v_0) le point $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ choisi arbitrairement.

L'application F est induite par une homographie H entre les plans des (u, v) et des $(\bar{u}, \bar{v})$ telle que H $(u_0, v_0) = (\bar{u}_0, \bar{v}_0)$; on peut choisir, en particulier, l'homographie H comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} u - u_0 = \bar{u} - \bar{u}_0 \\ v - v_0 = \bar{v} - \bar{v}_0 . \end{array} \right. \tag{1}$$

Il en résulte que F applique les deux systèmes de génératrices de Q_1 sur les systèmes correspondants de Q_2. D'autre part, il est évident que F n'est pas induite par une projectivité des espaces ambiants, G étant une gerbe sur Q_2, alors que la congruence correspondante sur Q_1 est supposée non-triviale. Il ressort, d'après un résultat connu (voir [2]) que F est une déformation projective entre les deux quadriques. Or une déformation projective conserve au maximum deux familles simples (∞^1) de courbes planes (le réseau R) et non une congruence. Nous arrivons ainsi à une contradiction, et donc une quadrique propre réglée ne possède pas de congruence P; cette surface n'est pas planaire. C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du théorème 5 de [1] est le:

THÉORÈME 2. – *On peut toujours appliquer une surface planaire sur une seconde surface quelconque avec conservation d'une ∞^2 de courbes planes. Sur la surface planaire, ces courbes forment une congruence* P, *alors que sur l'autre surface, les courbes planes correspondantes appartiennent soit à une gerbe choisie arbitrairement, soit à une congruence* P *s'il en existe sur cette surface.*

III. – Equations différentielles d'une représentation planaire.

Soient Σ une surface dans l'espace S_3 et:

(2) $$x_i = f_i(u, v) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

une représentation paramétrique de Σ. Cherchons des conditions nécessaires pour que cette représentation soit planaire, c'est-à-dire pour que les courbes sur Σ d'équation $au + bv + c = 0$ soient planes.

Supposant donc que la représentation (2) est planaire, par tout point $A(u_0, v_0)$ de la surface passe un faisceau de courbes planes images du faisceau de droites de sommet $A'(u_0, v_0)$ du plan π des (u, v). En particulier, la courbe $u = u_0$ passe par A et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit plane est que le déterminant:

(3) $$(x, x_v, x_{vv}, x_{vvv}) = 0$$

où dans (3) on a $u = u_0$, $x_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}$, etc...

L'équation d'une autre courbe plane du faisceau peut s'écrire:

(4) $$v - v_0 = m(u - u_0) \qquad m = \text{const.}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que cette courbe soit plane est que le déterminant:

(5) $$(x, x', x'', x''') = 0$$

avec
$$x' = \frac{dx}{du} = x_u + m x_v$$
$$x'' = \frac{d^2 x}{du^2} = x_{uu} + 2\, m x_{uv} + m^2 x_{vv}$$
$$x''' = \frac{d^3 x}{du^3} = x_{uuu} + 3\, m x_{uuv} + 3\, m^2 x_{uvv} + m^3 x_{vvv}\,.$$

En particulier, (5) doit être vérifiée au point $A(u_0, v_0)$ pour toute valeur de m. Calculant x et toutes les dérivées partielles $x_u, x_v, x_{uu}, \cdots, x_{vvv}$ en ce point et substituant dans (5), on peut alors développer ce déterminant en un polynôme de degré 6 en m:

(6) $$a_0 m^6 + a_1 m^5 + a_2 m^4 + \cdots + a_5 m + a_6 = 0$$

où les coefficients a_j $(j = 0, 1, \cdots, 6)$ sont des fonctions des $f_i(u, v)$ et de leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre inclus, évaluées au point (u_0, v_0). En particulier:

(7) $$a_6 = (x, x_u, x_{uu}, x_{uuu}) \quad , \quad a_0 = (x, x_v, x_{vv}, x_{vvv})\,.$$

L'équation (6) devant être satisfaite pour toute valeur de m, on doit avoir $a_j = 0$, $j = 0, 1, 2, \cdots, 6$. Or le point $A(u_0, v_0)$ est arbitraire sur la surface Σ, nous en concluons que les fonctions $f_i(u, v)$ dans (2) sont une solution du système de sept équations aux dérivées partielles du troisième ordre:

$$a_j(x, x_u, x_v, \cdots, x_{uuu}, \cdots, x_{vvv}) = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, 6. \tag{8}$$

Réciproquement, soient $g_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ quatre fonctions formant une solution de (8). Pour tout couple de valeurs (u_0, v_0), ceci implique que les coefficients de l'équation (6) sont tous nuls et que, par conséquent, le déterminant (5) est nul, quel que soit m; remarquant que a_0 est le déterminant dans (3), (3) est donc également satisfait. Considérons, alors, dans l'espace projectif S_3, la surface Σ' définie paramétriquement par les équations $x_i = g_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Les équations (3) et (5) étant satisfaites par ces fonctions au point (u_0, v_0) pour toute valeur de m, on en conclut que toutes les courbes (4) et la courbe $u = u_0$ ont en ce point un plan osculateur stationnaire. Pour chacune de ces courbes, le point (u_0, v_0) peut être choisi arbitrairement sur elle, ce qui signifie que le plan osculateur est stationnaire en tout point de cette courbe; celle–ci est donc plane.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 3. – *Pour qu'une représentation paramétrique* (2) *d'une surface soit planaire, il faut et il suffit que les quatre fonctions* $f_i(u, v)$ *constituent une solution du système* (8).

On vérifie, sans difficultés, que les représentations planaires qui définissent une congruence triviale ou gerbe (voir les équations (7) de [1]) sont solutions du système (8). Mais il existe d'autres solutions, ce sont celles qui définissent les congruences P; nous en donnons ci–après quelques exemples.

IV. – EXEMPLES DE SURFACES PLANAIRES.

Si les quatre fonctions $f_i(u, v)$ dans (2) sont des polynômes de degré $n \leq 2$, toutes les dérivées partielles du troisième ordre sont identiquement nulles et le système (8) est satisfait. La représentation correspondante est donc planaire; toutefois, la congruence qu'elle définit peut être triviale, et nous étudions ci–après les cas possibles. Toutes les surfaces, représentables paramétriquement par des polynômes du deuxième degré au plus, ont été amplement analysées (voir par exemple [3]); nous nous contenterons ici de rappeler leurs propriétés qui nous intéressent, en insistant sur les cas où elles sont planaires. Nous étudions ensuite un exemple de surface planaire qui n'est pas de la catégorie précédente. Nous écartons les cas où les quatre $f_i(u, v)$ sont des polynômes de degré inférieur à deux ou linéairement dependants.

1. *Surfaces de Steiner*. Ces surfaces sont des quartiques possédant trois droites doubles, distinctes ou non, qui concourent en un point triple. Dans une représentation paramétrique (planaire) par des polynômes de degré $n \leq 2$, les sections planes d'une telle surface sont les images d'une famille F

triplement infinie de coniques du plan π des paramètres u, v. F contient une ∞^2 de coniques dégénérées, c'est-à-dire de paires de droites; l'image d'une telle paire est une paire de coniques situées dans un même plan qui est, en général, tangent à la surface en l'un des quatre points d'intersection des deux coniques, les trois autres points étant des points doubles. Dans ce qui suit, nous étudions un exemple de surface de Steiner et examinons en détail la famille de ces coniques images des droites du plan π; nous verrons que c'est une congruence P.

Nous considérons la surface S de Steiner définie paramétriquement par la représentation suivante:

$$x_1 = u \,,\; x_2 = v \,,\; x_3 = uv \,,\; x_4 = u^2 + v^2 + 1 \,. \tag{9}$$

Pour faciliter l'étude de la congruence planaire définie sur S par (9), nous considérons l'espace affine A_3 obtenu en prenant $x_4 = 0$ pour plan à l'infini. Désignant alors par (x, y, z) les coordonnées non-homogènes d'un point de A_3, les équations de la surface deviennent:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2+1} \quad,\quad y = \frac{v}{u^2+v^2+1} \quad,\quad z = \frac{uv}{u^2+v^2+1} \tag{10}$$

ou encore: $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = xyz$. Les trois droites doubles sont les axes:

$L_1 : x = z = 0$ correspondant à $u = 0$,

$L_2 : y = z = 0$ correspondant à $v = 0$,

$L_3 : x = y = 0$ correspondant à la droite à l'infini du plan π,

l'origine $o\,(0, 0, 0)$ est le point triple. Nous obtenons alors les résultats suivants pour la congruence planaire:

une courbe $u = c$ (c constante non-nulle) est une section de S par le plan $z = cy$ qui contient encore la droite double L_2 comptée deux fois; c'est un plan tangent à S au point $x_0 = \frac{c}{1+c^2}$, $y_0 = z_0 = 0$ (correspondant à $u_0 = c$, $v_0 = 0$). Notons que pour $c \neq \pm 1$, on a en ce point deux plans tangents distincts: $z = cy$ et $z = \frac{1}{c}\,y$; pour $c = \pm 1$, on a un plan tangent unique, les points de tangence $\left(\pm\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ étant les points-pince sur L_2.

une courbe $v = c$ ($c \neq 0$) est une section de S par le plan $z = cx$ qui contient encore la droite L_1 comptée deux fois; ce plan est tangent à S au point $\left(0, \frac{c}{1+c^2}, 0\right)$. Comme dans le cas précédent, on a deux plans tangents distincts en ce point, sauf aux points-pince $\left(0, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$ sur L_1 correspondant à $c = \pm 1$.

une courbe $v = mu$ (m constante non-nulle) est une section de S par le plan $y = mx$ qui contient également la droite L_3 comptée deux fois; ce plan est tangent à S au point $\left(0, 0, \frac{m}{1+m^2}\right)$. Ici encore, pour $m \neq \pm 1$ les deux plans $y = mx$ et $y = \frac{1}{m} x$ sont tangents en ce point, alors que pour $m = \pm 1$, ces deux plans coincident, le point de tangence étant alors l'un ou l'autre des points–pince $\left(0, 0, \pm\frac{1}{2}\right)$ sur L_3.

une courbe $v = mu + c\,(mc \neq 0)$ sur la surface est située dans le plan:

$$(m^2 + c^2)\,x - m\,(1 + c^2)\,y - c\,(1 + m^2)\,z + mc = 0. \tag{11}$$

Substituant (10) dans (11), on obtient:

$$(mu + c - v)\,(cu - mcv + m) = 0$$

donc la section de S par le plan (11) est formée par les deux courbes (coniques):

$$C_1 : v = mu + c \quad , \quad C_2 : v = \frac{u}{m} + \frac{1}{c} \cdot \tag{12}$$

Nous distinguons ici plusieurs cas:

(*i*) $m \neq \pm 1$, $c \neq \pm 1$, $m \neq \pm c$. Les deux courbes (12) se coupent au point (x_0, y_0, z_0) correspondant aux valeurs (u_0, v_0) des paramètres avec:

$$u_0 = \frac{m\,(1 - c^2)}{c\,(m^2 - 1)} \quad , \quad v_0 = \frac{m^2 - c^2}{c\,(m^2 - 1)} \tag{13}$$

et on vérifie que le plan (11) est tangent à S en ce point. Inversement, le plan tangent à S en un point (u_0, v_0) – avec $u_0 v_0 \neq 0$ – coupe la surface selon deux courbes C_1 et C_2 données par (12), où m et c sont solutions du système (13).

(*ii*) $m \neq \pm 1$, $c \neq \pm 1$, $m = \pm c$. Les deux courbes (12) se touchent en l'un des points–pince $\left(\pm\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ sur L_2. Le plan (11) se réduit alors à:

$$c\,(2x \pm 1) - (1 + c^2)\,(z \pm y) = 0 \tag{14}$$

et n'est pas tangent à la surface. Tous les plans (14) forment deux faisceaux dont les axes sont les droites $x = \mp\frac{1}{2}$, $z = \mp y$, tangentes communes à C_1 et C_2 au point–pince correspondant.

(*iii*) $m \neq \pm 1$, $c = \pm 1$. C_1 et C_2 se touchent en l'un des points–pince sur L_1. Le plan (11) se réduit ici à:

$$(1 + m^2)\,(x \mp z) - m\,(2y \mp 1) = 0 \tag{15}$$

qui n'est pas tangent à la surface. Comme dans le cas précédent, ces plans (15) forment deux faisceaux dont les axes $y = \pm\frac{1}{2}$, $z = \pm x$ sont tangentes communes à C_1 et C_2 au point–pince correspondant.

(*iv*) $m = \pm 1$; $c \neq \pm 1$. C_1 et C_2 se touchent en l'un des points–pince sur L_3 et le plan (11) devient alors:

$$(1 + c^2)\,(x \mp y) - c\,(2z \mp 1) = 0 \tag{16}$$

qui n'est pas tangent à la surface. Ici encore, les plans (16) forment deux faisceaux dont les axes sont tangentes communes à C_1 et C_2: $z = \pm\frac{1}{2}$, $y = \pm x$ au point–pince correspondant.

(*v*) $m = \pm 1$, $c = \pm 1$. Dans ce cas, C_1 et C_2 coincident, le plan (11) se réduit à l'un des quatre plans:

$2x \mp 2y \mp 2z + 1 = 0$ correspondant à $v = \pm (u + 1)$ ou $m = c = \pm 1$

$2x \mp 2y \pm 2z - 1 = 0$ correspondant à $v = \pm (u - 1)$ ou $m = - c = \pm 1$.

Ces quatre plans sont, chacun, tangents à la surface en chacun des points de la courbe de section, sauf aux points–pince. On voit, aisément, qu'ils déterminent les quatre faces d'un tétraèdre dont les six arêtes sont les axes des faisceaux mentionnés dans les cas (*ii*), (*iii*) et (*iv*) ci–dessus. Chacune des quatre courbes de section est inscrite dans la face correspondante, les points de tangence avec les arêtes étant les points–pince sur les axes L_1, L_2, L_3.

En résumé, toutes les courbes sur la surface, d'équation générale $au + bv + c = 0$, sont planes comme prévu. La famille des plans contenant ces courbes est constituée par tous les plans tangents à S et par les plans des six faisceaux dont les axes sont les arêtes du tétraèdre ci–dessus. D'une part, ces arêtes n'ont pas de point commun; d'autre part, les plans tangents à S ne passent pas tous par un même point; cette famille de plans n'appartient donc pas à une gerbe. Nous avons ainsi démontré le théorème:

THÉORÈME 4. – *Les surfaces de Steiner sont planaires; une congruence* P *sur une telle surface est constituée par les sections de la surface par tous ses plans tangents et par tous les plans de six faisceaux dont les axes forment les arêtes d'un tétraèdre, chaque arête passant par un des points–pince de la surface, et chaque face du tétraèdre étant tangente le long de la courbe de section.*