ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ADOLF HAIMOVICI

Sur une interprétation géométrique des systèmes de Pfaff; calcul tensoriel et invariants attachés à ces systèmes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.1, p. 17-27.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_17_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Sur une interprétation géométrique des systèmes de Pfaff; calcul tensoriel et invariants attachés à ces systèmes.* Nota di ADOLF HAIMOVICI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUNTO. — Proseguendo l'interpretazione geometrica dei sistemi di Pfaff introdotta in una precedente Nota lineea [3], si perviene ad attaccare un calcolo tensoriale ed una serie di invarianti a ciascuno di tali sistemi.

§ 1. — INTRODUCTION.

Nous nous sommes occupés récemment [3] d'un transport parallèle attaché à un système de Pfaff

$$(1) \quad dy^i = a_j^i(x; y) dx^j,$$

transport qui nous à conduit à la notion de courbure et de torsion attachées à un tel système. D'autre part, si les $a_j^i(x; y)$ sont des fonctions homogènes du premier degré en y^i , on peut interpréter les équations de plus haut comme des relations définissant le transport parallèle des directions, dans un espace à connexion non-linéaire [1], [2], [4], [5].

Dans la Note présente, nous avons généralisé les notions de plus haut. En interprétant les y^i comme les composantes d'un vecteur issu du point x , les équations de plus haut définissent un certain transport des vecteurs.

En partant de cette idée, on peut introduire un calcul tensoriel lié au système (1) et définir une dérivation covariante, un tenseur de courbure et un tenseur de torsion. Les systèmes à tenseur de courbure nul sont les systèmes complètement intégrables.

En partant ensuite du fait que la longueur d'un vecteur d'un espace riemannien est un invariant au transport parallèle, nous cherchons les systèmes (1) qui admettent un invariant $V(x; y)$ au transport des vecteurs y , défini par (1).

De ce point de vue, la fonction $V(x; dy)$ aura une analogie avec la métrique d'un espace Riemannien.

Enfin, on étudie le cas où les extrémals de cet invariant sont les lignes tangentes à un champ de vecteurs qui se transportent d'après (1).

§ 2. — COURBURE ET TORSION D'UN SYSTÈME PFAFF.

1. — Considerons le système de Pfaff

$$(1) \quad dy^i = a_j^i(x; y) dx^j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

$$x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n), \quad y \equiv (y^1, y^2, \dots, y^n),$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

où:

- a) les fonctions $a_j^i(x; y)$ sont définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et sont de classe C^1 .
 b) la matrice

$$(2) \quad a = (a_j^i)$$

est non singulière sur le domaine de définition des fonctions $a_j^i(x; y)$.

Supposons que les variables x^i représentent les coordonnées d'un point x de $\mathbb{R}^n$, et que les variables y^j sont les composantes d'un vecteur du même espace.

Si on fait le changement des variables x^i , donné par

$$(3) \quad u^i = u^i(x),$$

les composantes du vecteur y deviennent:

$$(4) \quad v^i = y^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Si on désigne par $\bar{a}_j^i(u; v)$ les coefficients du système de Pfaff

$$dv^i = \bar{a}_j^i(u; v) du^j,$$

satisfait par les fonctions v^i des variables u^j , on a de (4), compte tenu de (1):

$$(5) \quad y^j \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} + a_k^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \bar{a}_j^i \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = 0.$$

Dérivons maintenant cette équation par rapport à x^l , compte tenu du fait que, par suite de (1), les y^a sont des fonctions des x^b et, par suite de (3) et (4), les u^c et v^d sont aussi des fonctions des x^b ; remplaçons ensuite dans (5) l'indice k par l , dérivons cette dernière équation par rapport à x^k , compte tenu des mêmes considérations; faisons ensuite la différence de ces égalités; nous obtenons alors:

$$(6) \quad \left(\frac{D a_k^j}{D x^l} - \frac{D a_l^j}{D x^k} \right) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \left(\frac{D \bar{a}_j^i}{D u^p} - \frac{D \bar{a}_p^i}{D u^j} \right) \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \frac{\partial u^p}{\partial x^l},$$

où nous avons introduit la notation:

$$(7) \quad \frac{D}{D x^k} \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} + a_k^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \frac{D}{D u^r} \equiv \frac{\partial}{\partial u^r} + \bar{a}_r^s \frac{\partial}{\partial v^s}.$$

La relation (6) nous conduit à désigner comme courbure du système (1), l'ensemble des n^3 fonctions:

$$(8) \quad R_{kl}^j(x; y) = \frac{D a_k^j}{D x^l} - \frac{D a_l^j}{D x^k}.$$

Il est évident que le système (1) est complètement intégrable si sa courbure est nulle et réciproquement.

Dérivons encore les deux membres de l'égalité (5) par rapport à y^r compte tenu de (4). Nous obtenons

$$(9) \quad \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^r \partial x^j} + \frac{\partial a_j^k}{\partial y^r} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{a}_a^i}{\partial v^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^r} \frac{\partial u^a}{\partial x^j} = 0.$$

Dans cette relation changeons entre eux les indices r et k et faisons la différence entre les deux membres de ces équations; nous trouvons alors:

$$(10) \quad \left(\frac{\partial a_k^j}{\partial y^r} - \frac{\partial a_r^j}{\partial y^k} \right) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial \bar{a}_j^i}{\partial v^p} - \frac{\partial \bar{a}_p^i}{\partial v^j} \right) \frac{\partial u^p}{\partial x^r} \frac{\partial u^j}{\partial x^k}.$$

Cette relation nous conduit à poser:

$$(11) \quad T_{kr}^j = \frac{\partial a_k^j}{\partial y^r} - \frac{\partial a_r^j}{\partial y^k},$$

et à définir comme torsion du système (1) les n^3 fonctions T_{kr}^j .

Considérons maintenant un tenseur quelconque $V_{kl}^i(x; y)$, y étant donné par (1). Soit $\bar{V}_{gr}^p$ son transformé par (3), qui comme R_{kl}^i et T_{kl}^i est lié à V_{kl}^i par les relations

$$(12) \quad V_{kl}^j(x; y) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \bar{V}_{gr}^i(u; v) \frac{\partial u^g}{\partial x^k} \frac{\partial u^r}{\partial x^l}.$$

Dérivons les deux membres de (12) par rapport à x^s , compte tenu du fait que les y^i sont des fonctions des x^j , données par (1) et que les u et les v , sont des fonctions de x données par (3) et (4). En remplaçant les dérivées secondes des u^i par leurs valeurs de (9), et compte tenu des relations (12) on obtient:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{DV_{kl}^j}{Dx^s} - \frac{\partial a_\alpha^j}{\partial y^r} V_{kl}^\alpha + \frac{\partial a_k^\alpha}{\partial y^r} V_{\alpha l}^j + \frac{\partial a_l^\alpha}{\partial y^r} V_{k\alpha}^j \right) \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \\ & = \left(\frac{DV_{j\beta}^i}{Du^s} - \frac{\partial \bar{a}_\alpha^i}{\partial v^s} \bar{V}_{j\beta}^\alpha + \frac{\partial \bar{a}_j^\alpha}{\partial v^s} \bar{V}_{\alpha\beta}^i + \frac{\partial \bar{a}_\beta^\alpha}{\partial v^s} \bar{V}_{j\alpha}^i \right) \frac{\partial u^s}{\partial x^k} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial u^s}{\partial x^r}. \end{aligned}$$

Cette égalité nous conduit à définir comme dérivée covariante de $V_{k\dots}^i(x; y)$ le tenseur:

$$(13) \quad V_{k\dots, r}^i = \frac{DV_{k\dots}^i}{Dx^r} - \frac{\partial a_\alpha^i}{\partial y^r} V_{k\dots}^\alpha - \dots + \frac{\partial a_k^\alpha}{\partial y^r} V_{\alpha\dots}^i + \dots$$

§ 3. - INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Soit x un point de R^n , et y un vecteur avec l'origine en x . Le système (1) définit alors un transport des vecteurs y .

Nous allons évaluer la variation Δy de y , quand l'origine de y parcourt un contour fermé, et il se déplace d'après (1).

Soient Γ un contour simple rectifiable, qui passe par x , et $\mathfrak{D}$ le domaine borné dont Γ est la frontière. On a évidemment

$$\int_{\Gamma} dy^i = \int_{\Gamma} a_j^i(x; y) dx^j = \int_{\mathfrak{D}} \left(\frac{Da_j^i}{Dx^k} - \frac{Da_k^i}{Dx^j} \right) dx^j dx^k.$$

On conclut, que si Δy^i est la partie principale de la variation de y^i , après le transport le long de Γ , en partant de x , on a:

$$(14) \quad \Delta y^i = R_{jk}^i [dx^j, dx^k],$$

ce qui donne l'interprétation du tenseur R_{jk}^i , d'ailleurs analogue à celle des tenseur de courbure d'un espace à connexion affine.

2. - Considérons les vecteurs y^i , dx^i et δx^i .

Déplaçons $y^i + dx^i$ le long de δx^i et le vecteur $y^i + \delta x^i$ le long de dx^i , le déplacement étant défini par (1). On a

$$\delta (y^i + dx^i) = a_j^i(x; y + dx) \delta x^j,$$

$$d (y^i + \delta x^i) = a_j^i(x; y + \delta x) dx^j.$$

La partie principale de la différence

$$\delta dx^i - d \delta x^i,$$

quand les vecteurs dx^i et δx^i sont appliqués au point $x + y$, est alors:

$$\left(\frac{\partial a_j^i}{\partial y^k} - \frac{\partial a_k^i}{\partial y^j} \right) [dx^k, dx^j],$$

ce qui donne une interprétation géométrique de la torsion du système (1).

Remarque. Ecrivons le système (1) sous la forme

$$(15) \quad dx^r = A_s^r(x; y) dy^s,$$

où les A_s^r sont des fonctions satisfaisant à

$$(16) \quad a_j^i A_k^j = \delta_k^i.$$

Posons comme dans (7):

$$\frac{D}{Dy^p} = \frac{\partial}{\partial y^p} + A_p^r \frac{\partial}{\partial x^r} = A_p^r \left(\frac{\partial}{\partial x^r} + a_r^s \frac{\partial}{\partial y^s} \right).$$

La courbure du système (15) est alors:

$$(17) \quad S_{pq}^r(x; y) = \frac{DA_p^r}{Dy^q} - \frac{DA_q^r}{Dy^p} = A_q^s \frac{DA_p^r}{Dx^s} - A_p^s \frac{DA_q^r}{Dx^s}.$$

De (16) on tire encore:

$$\frac{DA_k^r}{Dx^s} = -A_k^j A_i^r \frac{Da_j^i}{Dx^s}$$

et en remplaçant cette formule dans (17), on obtient

$$(18) \quad S_{pq}^r = A_p^s A_q^j A_i^r R_{js}^i,$$

formule qui donne la courbure de (15) en fonction de celle de (1).

Remarquons enfin les relations:

$$(19) \quad \frac{DR_{ij}^k}{Dx^h} + \frac{DR_{jh}^k}{Dx^i} + \frac{DR_{hi}^k}{Dx^j} = R_{jh}^\beta \frac{\partial a_i^k}{\partial y^\beta} + R_{hi}^\beta \frac{\partial a_j^k}{\partial y^\beta} + R_{ij}^\beta \frac{\partial a_h^k}{\partial y^\beta},$$

obtenues de (8) compte tenu des relations de commutation:

$$(20) \quad \frac{D}{Dx^h} \frac{D}{Dx^k} - \frac{D}{Dx^k} \frac{D}{Dx^h} = R_{kh}^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}.$$

Les relations (19) s'écrivent encore à l'aide des dérivées covariantes, sous la forme:

$$(21) \quad R_{ij,h}^k + R_{jh,i}^k + R_{hi,j}^k = R_{jh}^\beta T_{i\beta}^k + R_{hi}^\beta T_{j\beta}^k + R_{ij}^\beta T_{h\beta}^k + \\ + R_{\alpha j}^k T_{hi}^\alpha + R_{\alpha h}^k T_{ij}^\alpha + R_{\alpha i}^k T_{jk}^\alpha.$$

Ce sont les identités de Bianchi.

Remarque. Si les coefficients $a_i^j(x; y)$ ont la forme particulière

$$(22) \quad a_i^j(x; y) = \Gamma_{hi}^j(x) y^h,$$

les équations (1) peuvent être considérées comme définissant le transport parallèle dans un espace à connexion affine. L'équation (9) se réduit alors à celle qui donne la transformation des coefficients de la connexion. On obtient encore

$$R_{ij}^h(x; y) = R_{kij}^h(x) y^k,$$

et les relations (8) et (11) conduisent aux tenseurs de courbure et de torsion d'un espace à connexion affine. Enfin les relations (21) sont les identités de Bianchi habituelles.

§ 4. - UN INVARIANT AU TRANSPORT DÉFINI PAR (1).

Nous nous proposons de trouver les systèmes de Pfaff (1) tels qu'il existe un invariant au transport défini par (1).

Si on désigne par $f(x; y)$ un tel invariant, il devra satisfaire à la condition

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial f}{\partial y^i} dy^i = 0,$$

pour tout dx^i et pour tout dy^i donné par (1); cette condition est satisfaite si

$$(23) \quad \frac{Df}{Dx^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + a_i^p \frac{\partial f}{\partial y^p} = 0.$$

D'ailleurs cette équation est plus restrictive que la précédente. La condition d'intégrabilité de (1) s'écrit

$$(231) \quad R_{ij}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} = 0.$$

Les prolongements de ce système s'obtiennent en prenant les dérivées covariantes des deux membres. On a alors:

$$R_{ij,k}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} + R_{ij}^{\alpha} \left(\frac{D}{Dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} \right) + \frac{\partial a_{\alpha}^{\beta}}{\partial y^k} \frac{\partial f}{\partial y^{\beta}} \right) = 0.$$

Compte tenu de la formule de commutation

$$(*) \quad \frac{D}{Dx^k} \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} - \frac{\partial}{\partial y^{\alpha}} \frac{Df}{Dx^k} = - \frac{\partial a_k^{\beta}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial f}{\partial y^{\beta}},$$

et de (23), cette équation s'écrit

$$(R_{ij,k}^{\alpha} + R_{ij}^{\beta} T_{\beta k}^{\alpha}) \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} = 0.$$

En supposant enfin le transport défini par le système (1) sans torsion, cette dernière équation devient

$$(232) \quad R_{ij,k}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} = 0.$$

Les prolongements suivants seront

$$(233) \quad R_{ij,kl}^{\alpha} \frac{\partial f}{\partial y^{\alpha}} = 0, \\ \dots \dots \dots$$

et de même

$$\left(R_{ij}^{\alpha} \frac{\partial R_{pq}^{\beta}}{\partial y^{\alpha}} - R_{pq}^{\alpha} \frac{\partial R_{ij}^{\beta}}{\partial y^{\alpha}} \right) \frac{\partial f}{\partial y^{\beta}} = 0, \\ \dots \dots \dots$$

Afin qu'il existe un invariant du type cherché, il faut que le système d'équations (23), (231), ... soit compatible. Or, les fonctions f dépendent de $2n$ variables. Il faut donc que parmi les équations (23), (231), ... il y ait $2n - 1$ au plus linéairement indépendantes. Comme les n équations (23) sont évidemment linéairement indépendantes entre elles et linéairement indépendantes des autres, il faut que parmi les équations (231), (232), ... il y ait $n - 1$ au plus, linéairement indépendantes.

Nous allons nous occuper plus en détail du cas $n = 2$. La condition d'existence de l'invariant se réduit alors à

$$(24) \quad R_{12,r}^k = \lambda_r R_{12}^k,$$

parce que dans ce cas il faut qu'il existe une seule équation linéairement indépendante. La relation (24), implique des conditions pour λ_k : en effet on a:

$$R_{12,rs}^k - R_{12,rs}^k = (\lambda_{r,s} - \lambda_{s,r}) R_{12}^k;$$

après avoir effectué les calculs on obtient:

$$\left(\frac{\partial R_{12}^1}{\partial y^1} + \frac{\partial R_{12}^2}{\partial y^2} \right) R_{12}^k = \left(\frac{D\lambda_1}{Dx^2} - \frac{D\lambda_2}{Dx^1} \right) R_{12}^k$$

où nous avons tenu compte du fait que la torsion est nulle.

En remplaçant les composantes R_{12}^i par leurs expressions en fonction des a_i^j on obtient à la fin:

$$\left\{ \frac{D}{Dx^2} \left(\frac{\partial a_1^1}{\partial y^1} + \frac{\partial a_1^2}{\partial y^2} - \lambda_1 \right) - \frac{D}{Dx^1} \left(\frac{\partial a_2^1}{\partial y^1} + \frac{\partial a_2^2}{\partial y^2} - \lambda_2 \right) \right\} R_{12}^k = 0.$$

Si on suppose $R_{12}^k \neq 0$, cette équation conduit à:

$$(25) \quad \frac{D}{Dx^2} \left(\frac{\partial a_1^i}{\partial y^i} - \lambda_1 \right) = \frac{D}{Dx^1} \left(\frac{\partial a_2^i}{\partial y^i} - \lambda_2 \right)$$

et, comme on voit aisément, si l'on donne arbitrairement λ_2 , la composante λ_1 , est solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

Le système à intégrer est formé par (23) et (23₁).

En ce qui concerne (23₁), les caractéristiques sont données par

$$R_{12}^2 dy^1 - R_{12}^1 dy^2 = 0.$$

Soit

$$(26) \quad V(x_i; y^1, y^2) = \eta^1$$

l'intégrale générale de cette équation. En prenant encore

$$(26') \quad \eta^2 = y^2, \quad \xi^i = x^i,$$

on constate que le système (23), (23₁) se réduit à:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \eta^2} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \xi^i} + \frac{\partial f}{\partial \eta^1} \left(\frac{\partial V}{\partial x^i} + a_i^\alpha \frac{\partial V}{\partial y^\alpha} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Évaluons les parenthèses des secondes équations: à ce but partons de l'égalité:

$$(28) \quad R_{12}^1 \frac{\partial V}{\partial y^1} + R_{12}^2 \frac{\partial V}{\partial y^2} = 0.$$

Si on prend la dérivée covariante des deux membres de cette équation, compte tenu de la relation de commutation (*), du fait que la torsion est nulle, de (24) et (28), on obtient:

$$R_{12}^k \frac{\partial}{\partial y^k} \left(\frac{DV}{Dx^i} \right) = 0.$$

Comme on a $R_{12}^k \neq 0$, il résulte que

$$\frac{\partial \left(V, \frac{DV}{Dx^i} \right)}{\partial (y^1, y^2)} = 0,$$

et par suite

$$(29) \quad \frac{DV}{Dx^i} = \varphi_i(V),$$

φ_i étant des fonctions d'une variable qui pour le moment sont arbitraires.

En appliquant à (29) la relation de commutation (20), on obtient:

$$\frac{d\varphi_1}{dV} \frac{DV}{Dx^2} - \frac{d\varphi_2}{dV} \frac{DV}{Dx^1} = 0,$$

c'est à dire:

$$\varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dV} - \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dV} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_2 = A\varphi_1 \quad A = \text{const.}$$

En changeant au besoin ξ^2 en $\xi'^2 = A\xi^2$, on peut supposer $A = 1$, de manière qu'on ait:

$$(30) \quad \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi(\eta).$$

Le second système (27) devient maintenant

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^i} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0;$$

supposons $\varphi \neq 0$; si on considère alors la fonction:

$$\alpha(\eta) = \int \frac{1}{\varphi(\eta)} d\eta,$$

on obtient de ce système:

$$\eta - \beta(\xi^1 + \xi^2) = \text{const.}$$

β étant la fonction inverse de α ; la fonction f dépend donc seulement de la fonction

$$\mathfrak{J} = V(x; y^1, y^2) - \beta(x^1 + x^2),$$

que l'on peut prendre comme l'invariant cherché. Si $\varphi = 0$, l'invariant cherché est:

$$\mathfrak{J} = V(x; y^1, y^2).$$

Imposons encore à l'invariant cherché la condition d'être homogène du premier degré en y^i , c'est à dire

$$(31) \quad y^1 \frac{\partial f}{\partial y^1} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2} = f.$$

En prenant comme nouvelle fonction inconnue

$$g = f - f(x, y),$$

le système formé par (23), (23₁), (23₂), ... et (31) est

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} + \frac{1}{f} a_i^\alpha \frac{\partial g}{\partial y^\alpha} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

$$R_{12}^\alpha \frac{\partial g}{\partial y^\alpha} = 0,$$

$$R_{12,k}^\alpha \frac{\partial g}{\partial y^\alpha} = 0,$$

.....

$$y^\alpha \frac{\partial g}{\partial y^\alpha} + f \frac{\partial g}{\partial f} = 0.$$

La condition que ce système admette une intégrale est la même condition (24) et l'invariant cherché est la fonction f donnée par l'intermédiaire de g , qui satisfait à:

$$V\left(x; \frac{y^1}{g}, \frac{y^2}{g}\right) - \beta(x^1 + x^2) = 0,$$

V et β étant les fonctions introduites auparavant.

§ 5. - LES EXTRÉMALES DE L'INVARIANT TROUVÉ.

Trouvons enfin les conditions pour que l'invariant trouvé admette comme extrémales les lignes intégrales tangentes aux vecteurs y^i , c'est à dire les lignes

$$(32) \quad \ddot{x}^i - a_j^i(x; \dot{x}) \dot{x}^j = 0.$$

A ce but, partons de l'équation d'Euler

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0,$$

qui donne:

$$(33) \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial \dot{x}^i} \dot{x}^\alpha - \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^\alpha = 0.$$

Remarquons que, compte tenue de (23), on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial x^\alpha} = - \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(a_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\beta} \right) = - \frac{\partial a_\alpha^\beta}{\partial \dot{x}^i} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\beta} - a_\alpha^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^\beta},$$

de manière que (33) devient:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^\alpha \partial \dot{x}^i} (\dot{x}^\alpha - a_\beta^\alpha \dot{x}^\beta) - \left(\frac{\partial a_\beta^\alpha}{\partial \dot{x}^\alpha} \dot{x}^\beta - a_i^\alpha \right) \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\alpha} = 0.$$

Supposons maintenant que les extrémals sont les courbes (32). L'équation de plus haut conduit alors à la condition:

$$(34) \quad \left(\frac{\partial a_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^i} x^{\beta} - a_i^{\alpha} \right) \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$

Cette condition est satisfaite:

1) si

$$(35) \quad \frac{\partial a_{\beta}^{\alpha}}{\partial y^i} y^{\beta} - a_i^{\alpha} = 0.$$

Cette équation s'écrit encore

$$(35') \quad \frac{\partial (a_{\beta}^{\alpha} y^{\beta})}{\partial y^i} - 2 a_i^{\alpha} = 0,$$

et elle montre que les fonctions a_i^j sont homogènes du premier degré en y^i .

En effet, en multipliant les deux membres par y^i on constate que les fonctions

$$a_{\beta}^{\alpha} y^{\beta} = \varphi^{\alpha}(x; y)$$

sont homogènes du second degré en y^i .

En remplaçant cette expressions dans (35'), on obtient

$$a_i^{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial y^i}$$

ce qui démontre la conclusion.

Si l'espace est sans torsion, les équations (35) montrent directement la conclusion.

2) Si (34) est une conséquence de (23₁), (23₂), ... Dans le cas $n = 2$, on doit avoir:

$$(36) \quad \sigma^i \left(\frac{\partial a_{\beta}^{\alpha}}{\partial y^i} y^{\beta} - a_i^{\alpha} \right) = 0, \quad \sigma^i = \sigma^i(x; y)$$

et

$$(36') \quad R_{12}^{\alpha} = \tau_{12}^j \left(\frac{\partial a_{\beta}^{\alpha}}{\partial y^j} y^{\beta} - a_j^{\alpha} \right) \quad \tau_{12}^j = \tau_{12}^j(x, y).$$

Considérons comme exemple d'un tel espace celui dont

$$a_1^1 \neq 0, \quad a_1^2 = a_2^1 = a_2^2 = 0, \quad \frac{\partial a_1^1}{\partial y^2} = 0.$$

On a dans ce cas:

$$R_{12}^1 = \frac{\partial a_1^1}{\partial x^2}, \quad R_{12}^2 = 0,$$

$$R_{12,r}^2 = 0.$$

Les conditions (35) et (36) peuvent être réalisées toujours par un choix convenable des facteurs σ^i et τ_{12}^j .

L'invariant f est, dans ce cas:

$$f = V(y^2)$$

et ses extrémales sont

$$x^2 = \text{const.}$$

D'autres part, les lignes tangentes à une famille de vecteurs qui se transportent d'après (1) sont données par:

$$\ddot{x}^1 = a_1^1(x; \dot{x}) \dot{x}^1$$

$$x^2 = 0,$$

c'est à dire ces lignes sont des extrémales.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. BORTOLOTTI, *Differential invariants of direction and point displacements*, « Annals of Math. », ser. 2^a, t. 32, 361-377 (1931).
- [2] H. FRIESECKE, *Vectorübertragung, Richtungs übertragung, Metrik*, « Math. Ann. », 93, 101-108 (1925).
- [3] A. HAIMOVICI, *Sur un espace à connexion affine associé à un système de Pfaff*, « Rend. Lincei », ser. VIII, t. 38 828-837 (1965).
- [4] A. KAWAGUCHI, *On the theory of non-linear connections I*, « Tensor », New Series 2, 123-142 (1952).
- [5] A. KAWAGUCHI, *On the theory of non-linear Connection II*, « Tensor », New Series, t. 6, 165-199 (1956).