Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jaime Campos Ferreira

Sur l'intégrale de la limite d'une suite de distributions intégrables

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.1, p. 12–16.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_12_0>

Matematica. — *Sur l'intégrale de la limite d'une suite de distributions intégrables.* Nota di JAIME CAMPOS FERREIRA (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

RIASSUNTO. — Adoperando il concetto di limite di una distribuzione introdotto in una Nota precedente, [2], vengono ora studiate condizioni di permutabilità tra l'integrazione e il passaggio al limite, per distribuzioni su **R**, e si ottengono, in particolare, condizioni necessarie e sufficienti, nelle quali interviene essenzialmente un'estensione del concetto classico di convergenza quasi–uniforme.

1. – Dans une Note précédente, nous avons introduit les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'une distribution $f(x)$, lorsque $x \to \infty$, et aussi une définition de la limite $f(\infty)$, qui nous semble très naturelle et plus générale que celle, due à J. Sebastião e Silva, que nous avons utilisée dans nos travaux antérieurs. Cette nouvelle notion de limite nous a été suggérée dans l'étude de quelques problèmes relatifs à l'intégration des distributions et, dans ce domaine, elle s'est montrée très commode, en particulier parce qu'elle nous a conduit à obtenir aisément des généralisations naturelles de quelques théorèmes classiques bien connus, concernant la possibilité de changer l'ordre des opérations d'intégration et de passage à la limite pour les suites.

Dans cette Note, on essayera de donner, sans démonstrations, les énoncés des principaux résultats obtenus dans cette direction.

2. – On commencera par rappeler quelques définitions données dans la Note mentionnée ci–dessus:

Si f est une distribution réelle, d'ordre fini dans un voisinage de $+\infty$, pour chaque entier n suffisamment grand il existe des fonctions continues F_n telles qu'on ait $f(x) = D^n \frac{x^n}{n!} F_n(x)$. Alors on voit aisément que la limite supérieure, $\overline{\lambda_n}$ (resp. inférieure, $\underline{\lambda_n}$) de $F_n(x)$, lorsque $x \to \infty$, ne dépend que de f et n; et l'on voit aussi que:

$$\underline{\lambda_n} \leq \underline{\lambda_{n+1}} \lesseqgtr \overline{\lambda_{n+1}} \lesseqgtr \overline{\lambda_n}$$

ce qui nous conduit à poser, par définition:

$$\overline{f(+\infty)} = \lim_{n\to\infty} \overline{\lambda_n} \quad , \quad \underline{f(+\infty)} = \lim_{n\to\infty} \underline{\lambda_n} \, .$$

Pour une distribution complexe, $f = g + ih$ (g et h étant des distributions réelles) on pose encore: $\overline{f(+\infty)} = \overline{g(+\infty)} + i\overline{h(+\infty)}$, etc.; enfin,

(*) Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa.
(**) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

on dit que la distribution f est convergente lorsque $x \to +\infty$, si l'on a $\overline{f(+\infty)} = \underline{f(+\infty)} \in \mathbf{C}$.

Nous énnoncerons maintenant quelques propositions, dont les démonstrations sont très faciles et qui nous seront nécessaires par la suite:

PROPOSITION 1. – Soient f_1 et f_2 deux distributions réelles, d'ordre fini dans un voisinage de $+\infty$, et soit $f = f_1 + f_2$. En posant, pour abrégér, $\overline{f(+\infty)} = \overline{\lambda}$, $\overline{f_1(+\infty)} = \overline{\lambda_1}$, etc., on aura:

$$\max(\overline{\lambda_1} + \underline{\lambda_2}, \underline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2}) \lesseqgtr \overline{\lambda} \lesseqgtr \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2},$$

$$\underline{\lambda_1} + \underline{\lambda_2} \lesseqgtr \underline{\lambda} \lesseqgtr \min(\overline{\lambda_1} + \underline{\lambda_2}, \underline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2}).$$

PROPOSITION 2. – Si f_1 et f_2 sont des distributions (réelles ou complexes) d'ordre fini dans un voisinage de $+\infty$, $f = f_1 + f_2$ et si f_1 est convergente lorsque $x \to +\infty$, alors (en posant $\overline{\lambda_1} = \underline{\lambda_1} = \lambda_1$), on aura:

$$\overline{\lambda} = \lambda_1 + \overline{\lambda_2} \quad , \quad \underline{\lambda} = \lambda_1 + \underline{\lambda_2}.$$

PROPOSITION 3. – Si f est une distribution d'ordre fini dans un voisinage de $+\infty$ et si $\alpha \in \mathbf{R}$, alors:

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} [\alpha f(x)] = \begin{cases} \alpha\overline{\lambda} & \text{si} \quad \alpha \geq 0 \\ \alpha\underline{\lambda} & \text{si} \quad \alpha < 0, \end{cases}$$

(et de même pour la limite inférieure).

3. – La notion de convergence presque uniforme en un point $a \in \mathbf{R}$, qui intervient d'une façon essentielle dans quelques théorèmes classiques, dus à Arzela, peut être adaptée immédiatement au cas $a = +\infty$ de la manière suivante:

Si F et F_n ($n \in \mathbf{N}$) sont des fonctions définies dans des voisinages de $+\infty$, on dit que la suite F_n converge vers F, presque uniformément en $+\infty$ – et on écrit $F_n \xrightarrow[+\infty]{} F$ – si, pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque n suffisament grand, il existe un voisinage V de $+\infty$ tel que:

$$x \in V \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Dans le même ordre d'idées des théorèmes classiques mentionnés ci-dessus, on obtient très aisément le résultat suivant:

Si les limites $F_n(+\infty)$ existent au sens usuel, les conditions:

i) $F_n \xrightarrow[+\infty]{} F$, et

ii) il existe $F(+\infty)$ et on a $F(+\infty) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(+\infty)$, sont équivalentes.

Pour généraliser ce résultat au cadre de la théorie des distributions, il faut obtenir une extension convenable de la notion de convergence presque uniforme; à cet effet, si l'on observe que la définition précédente entraîne que:

$$F_n \xrightarrow[+\infty]{} F \iff \lim_{n \to \infty} \overline{\lim_{x \to +\infty}} |F_n(x) - F(x)| = 0,$$

(où la limite supérieure doit être interpretée au sens classique) la définition suivante nous semblera très naturelle:

DEFINITION. – Soient f, f_n des distributions définies dans des voisinages de $+\infty$; on dit que f_n converge vers f presque uniformément en $+\infty$, et on écrit $f_n \xrightarrow{+\infty} f$, si l'on a:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\lim_{x\to+\infty}} [f_n(x) - f(x)] = \lim_{n\to\infty} \underline{\lim_{x\to+\infty}} [f_n(x) - f(x)] = 0.$$

Dans ces conditions, on vérifie tout de suite que:

PROPOSITION 4. – Si $f_n \xrightarrow{+\infty} f$, $g_n \xrightarrow{+\infty} g$ et si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, alors

$$\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{+\infty} \alpha f + \beta g.$$

PROPOSITION 5. – Pour qu'on ait $f_n \xrightarrow{+\infty} f$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'entiers $p_n \geq 0$ et une suite de fonctions, F_n, continues dans des voisinages de $+\infty$, telles que:

$$f_n(x) - f(x) = D^{p_n} \frac{x^{p_n}}{p_n!} F_n(x),$$

(dans un voisinage V_n de $+\infty$), avec $F_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

On peut énnoncer maintenant la généralisation mentionnée ci-dessus:

THEOREME I. – *Soit* (f_n) *une suite convergente de destributions, définies dans un voisinage* V *de* $+\infty$ *et convergentes lorsque* $x \to +\infty$, *et soit* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ (*au sens usuel dans la théorie des distributions*). *Alors la convergence* $f_n \xrightarrow{+\infty} f$ *est une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit convergente lorsque* $x \to +\infty$ *et pour qu'on ait* $f(+\infty) = \lim_{n\to\infty} f_n(+\infty)$.

4. – On peut utiliser la notion de limite d'une distribution lorsque $x \to +\infty$, rappelée au § 2 (et la notion analogue, pour le cas $x \to -\infty$) pour définir d'une façon très générale l'intégrale d'une distribution f sur $\mathbf{R}$: on dit que f est intégrable s'il existe une distribution g, convergente lorsque $x \to +\infty$ et lorsque $x \to -\infty$, telle que $Dg = f$; et alors on pose, par définition:

$$\int_{\mathbf{R}} f = g(+\infty) - g(-\infty).$$

En tenant compte des propriétés de la notion de limite enoncées dans la partie finale de notre Note antérieure, on peut reconnaître que cette notion généralisée d'intégrale a de nombreuses propriétés désirables. D'autre part, on peut déduire, des résultats énoncés ci-dessus, les propositions suivantes:

PROPOSITION 6. – Soit (f_n) une suite convergente de distributions intégrables sur $\mathbf{R}$ et soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Pour que f soit intégrable et pour qu'on ait $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n$ il faut et il suffit qu'il existe des distributions g, g_n $(n \in \mathbf{N})$

telles que:

$$f = Dg \quad , \quad f_n = Dg_n \, ,$$

et que

$$g_n \xrightarrow{+\infty} g \quad , \quad g_n \xrightarrow{-\infty} g \, .$$

PROPOSITION 7. – Dans les mêmes conditions de la Proposition 6, pour que f soit intégrable et pour que $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'entiers $p_n \geq 0$ et une suite de fonctions G_n continues dans **R**, telles qu'on ait:

$$f_n(x) - f(x) = D^{p_n+1} \frac{(1+|x|)^{p_n}}{p_n!} G_n(x) \, ,$$

avec $G_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$, $G_n \xrightarrow[-\infty]{} 0$.

Comme dans le cas des problèmes classiques analogues, le remplacement de la convergence presque uniforme par la convergence uniforme nous conduit à des conditions, seulement suffisantes, mais dont l'application pratique est bien plus commode. Ainsi, on voit sans dificulté que:

PROPOSITION 8. – Soit f_n une suite de distributions intégrables sur **R** et $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. S'il existe des entiers $p_n \geq 0$ et des fonctions continues Φ_n tels que:

$$f_n(x) - f(x) = D^{p_n+1} \frac{(1+|x|)^{p_n}}{p_n!} \Phi_n(x) \, ,$$

avec $\Phi_n(x) \to 0$, uniformément sur **R**, f est intégrable et on a $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n$.

En tenant compte du théorème de la convergence bornée, de Lebesgue, on obtient aussi le critère suivant:

PROPOSITION 9. – Si les distributions f_n sont intégrables sur **R**, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, et s'il existe des entiers $p_n \geq 0$, des fonctions Ψ_n et une fonction θ, sommable dans **R**, tels qu'on ait:

$$f_n(x) - f(x) = D^{p_n} \frac{(1+|x|)^{p_n}}{p_n!} \Psi_n(x) \, ,$$

avec $|\Psi_n(x)| \lesssim \theta(x)$ et $\Psi_n(x) \to 0$ (p. p.), alors f est intégrable et $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n$.

Enfin, on peut énoncer les conditions, encore plus particulières, contenues dans les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 8'. – Soient f, f_n des distributions définies dans **R**, les f_n étant supposées intégrables; s'il existe un nombre p et des fonctions continues Φ, Φ_n, tels que:

$$f_n(x) = D^{p+1}(1+|x|)^p \Phi_n(x) \quad , \quad f(x) = D^{p+1}(1+|x|)^p \Phi(x) \, ,$$

avec $\Phi_n(x) \to \Phi(x)$ uniformément sur **R**, f est intégrable et $\int_{\mathbf{R}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n$.

PROPOSITION 9'. – Soient f, f_n des distributions définies dans $\mathbf{R}$, les f_n étant supposées intégrables; s'il existe un nombre p, des fonctions Ψ, Ψ_n et une fonction sommable θ, tels que:

$$f_n(x) = D^p (1 + |x|)^p \Psi_n(x) \quad , \quad f(x) = D^p (1 + |x|)^p \Psi(x),$$

avec $|\Psi_n(x)| \lessapprox \theta(x)$ et $\Psi_n(x) \to \Psi(x)$ (p.p.), alors f est intégrable et on a $\int_{\dot{\mathbf{R}}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\dot{\mathbf{R}}} f_n$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, « Studia Mathem. », *16* (1957).

[2] J. CAMPOS FERREIRA, *Sur la notion de limite d'une distribution à l'infini*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », VIII, vol. XXXVIII, *6* (1965).

[3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Theory of distributions, – Notes polycopiées d'un cours à l'Université de Maryland* (1964).

[4] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Integrals and orders of growth of distributions* (à paraître).