Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.6, p. 487–493.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_6_487_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Fisica matematica. — *Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane* (*). Nota I di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — The restricted problem of evolution for the vacuum Einstein equations in invariant form is considered. Taking into account previous results of A. Lichnerowicz and Y. Bruhat, without any assumption of analyticity a theorem of existence and unicity is established.

1. INTRODUZIONE. – I principali contributi alla risoluzione del problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali nel vuoto sono dovuti a A. Lichnerowicz (1) e a Y. Choquet-Bruhat (2).

Lichnerowicz ha mostrato che dalle equazioni di Einstein è possibile estrarre un sistema ristretto di sei equazioni alle derivate parziali del 2° ordine costituenti le *equazioni di evoluzione* propriamente dette, e un sistema complementare di quattro equazioni alle derivate parziali le quali, considerate sulla varietà iniziale $\overline{\Sigma}$ esprimono dei legami differenziali cui devono soddisfare i dati (*condizioni di compatibilità dei dati iniziali*). Il problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali viene perciò a constare di due parti. 1) *Problema dei dati iniziali*: Assegnare sull'ipersuperficie iniziale $\overline{\Sigma}$ dati che ivi soddisfino alle condizioni di compatibilità. 2) *Problema ristretto di evoluzione*: Ricercare una soluzione delle equazioni di evoluzione che su $\overline{\Sigma}$ verifichi i dati assegnati. Questa soluzione soddisferà poi automaticamente al gruppo delle equazioni complementari anche fuori di $\overline{\Sigma}$. Lichnerowicz stesso ha mostrato inoltre che se i dati sono analitici esiste ed è unica la soluzione del problema ristretto di evoluzione. I due problemi ora specificati non sono stati però enunciati da Lichnerowicz in forma intrinseca, stante il carattere non tensoriale dei due gruppi di equazioni e delle incognite che vi compaiono.

Il caso di dati non analitici è stato trattato e risolto da Y. Bruhat senza valersi dello spezzamento del problema suggerito da Lichnerowicz. Pensando scritto l'intero blocco delle equazioni di Einstein in coordinate armoniche, la Bruhat ha dimostrato un teorema di esistenza e unicità con un procedimento che si presenta utilizzabile anche sul piano dell'effettivo calcolo numerico, pur di non uscire, naturalmente, dall'ambito di coordinate armoniche. Benché

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 36 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1966.

(1) A. LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mècanique relativiste*, « Actualités Scientifiques et Industrielles », 833 (XII), Paris 1939, pp. 1–75.

(2) Y. FOURÈS-BRUHAT, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, « Acta Mathematica », *88* 141–225 (1952); *Sur l'integrations des équations de la relativité générale*, « Journal of rational mechanics and analysis », *5*, 951–966 (1956).

l'impiego di coordinate armoniche imponga ai dati di Cauchy quattro condizioni supplementari (condizioni iniziali di armonicità) il teorema di esistenza ha validità generale perché, scritte le equazioni di Einstein in un qualunque sistema di coordinate fisicamente ammissibili, ogni soluzione di queste equazioni che verifica i dati è esprimibile in coordinate armoniche mediante una opportuna trasformazione invertibile di coordinate. Si deve anche alla Bruhat la traduzione intrinseca del problema dei dati iniziali, nonché un'analisi accurata di vari metodi per risolverlo.

Come si è già detto, il procedimento esistenziale seguito dalla Bruhat non utilizza il suggestivo spezzamento del problema indicato da Lichnerowicz. Chi scrive si è domandato se non fosse possibile avvicinare i risultati conseguiti dalla Bruhat al punto di vista di Lichnerowicz, separando il problema di evoluzione e il problema dei dati iniziali, da formularsi entrambi intrinsecamente, e stabilire un teorema esistenziale per il problema di evoluzione con riferimento a dati non analitici. A tale scopo è stata dedicata una Nota del 1963 [3] alla quale fa ora seguito il presente lavoro. Nella Nota ora citata si è mostrato, mediante la tecnica delle proiezioni istituita da C. Cattaneo [4], come si possa giungere, in modo spontaneo, allo spezzamento del problema di Cauchy nel problema dei dati iniziali e nel problema ristretto di evoluzione, con formulazione intrinseca per entrambi. S'è ivi anche precisato che le equazioni alle derivate parziali traducenti il problema di evoluzione sono ponibili in forma normale, e che pertanto, supponendo analitici tutti i dati, in virtù del teorema di Cauchy-Kowalewski, il problema suddetto è localmente risolubile in modo univoco. Nella presente Nota ci si propone di mostrare come i teoremi di analisi istituiti dalla Bruhat, e da lei applicati all'intero blocco delle equazioni einsteiniane, possano utilizzarsi anche per il problema di evoluzione ristretto, permettendo così di stabilire l'esistenza e l'unicità della sua soluzione, anche se i dati non sono analitici.

2. RICHIAMI. – Il problema dei dati iniziali e il problema ristretto di evoluzione possono essere enunciati in forma intrinseca nel modo seguente:

I. *Problema dei dati iniziali.* – Siano assegnati in una varietà differenziabile V_4 una porzione di ipersuperficie regolare Σ, un arbitrario campo ausiliario di vettori controvarianti $\gamma^i(x)$ che nei punti di Σ non siano tangenti alla Σ stessa, e un campo ausiliario di vettori covarianti $\eta_i(x)$ legati ai precedenti dalla condizione [5]

$$\eta_i \gamma^i = -1 \tag{1}$$

(3) G. CARICATO, *Sul problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali nel vuoto*, « Rendiconti di Matematica » (3–4) *22* (1963).

(4) C. CATTANEO, *General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference*, « Il Nuovo Cimento », ser. X, *10*, 318–337; *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, « Annali di Matematica pura ed applicata » (IV), vol. XLVIII, 361–386 (1959).

(5) Si adotta la convenzione che gli indici greci $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ variino da 1 a 3, quelli latini da 1 a 4.

e tali che si abbia su $\bar{\Sigma}$ $\eta_\alpha = 0$. Scelto inoltre un sistema di coordinate x^i adattate al campo $\gamma^i(x)$ e a $\bar{\Sigma}$ (6), il problema dei dati iniziali consiste nell'assegnare su $\bar{\Sigma}$ due tensori simmetrici $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}, \bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ (significanti rispettivamente il tensore metrico prescelto per $\bar{\Sigma}$, e la determinazione ivi prescelta per il tensore di deformazione $\tilde{K}_{\alpha\beta}$) soddisfacenti alle condizioni seguenti:

$$
(2)\quad \begin{cases} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta > 0 \ , \quad \forall \xi^\alpha \in \bar{\Sigma} \ , \quad (S_\beta)_{\bar{\Sigma}} \equiv \bar{\gamma}^{\mu\varrho}\,(\tilde{\nabla}^*_\beta\,\bar{\varphi}_{\varrho\mu} - \tilde{\nabla}^*_\mu\,\bar{\varphi}_{\beta\varrho}) = 0 \ , \quad (\bar{\gamma}^{\alpha\beta}\,\bar{\gamma}_{\varrho\beta} = \delta^\alpha_\varrho), \\ (\tilde{R} + \mathfrak{I})_{\bar{\Sigma}} \equiv \rightarrow (\tilde{R}^*)_{\bar{\Sigma}} - \frac{1}{4}\,[\bar{\gamma}^{\alpha\varrho}\,\bar{\gamma}^{\beta\tau}\,\bar{\varphi}_{\varrho\tau}\,\bar{\varphi}_{\alpha\beta}) - (\bar{\gamma}^{\alpha\varrho}\,\bar{\varphi}_{\alpha\varrho})^2] = 0 , \end{cases}
$$

ove $(\tilde{R}^*)_{\bar{\Sigma}}$ è lo scalare di curvatura dell'ipersuperficie $\bar{\Sigma}$, pensata munita del tensore metrico $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$, e $\tilde{\nabla}^*_\alpha$ l'operatore di derivazione covariante su $\bar{\Sigma}$.

II. *Problema ristretto di evoluzione.* – Il problema ristretto di evoluzione ha per oggetto la determinazione, in un conveniente intorno 4-dimensionale W di $\bar{\Sigma}$, di un campo di tensori doppi simmetrici $\gamma_{ij}(x)$ ivi soddisfacenti alle condizioni

$$
(3)\qquad \gamma_{ij}\,\gamma^j = 0 \cdots W \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),
$$

$$
(4)\quad \begin{cases} 2\,s_{\alpha\beta} \equiv (\gamma^4)^2\,[\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta} - \eta_\alpha\,\eta_\beta\,\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\varrho\sigma} + \gamma^{\varrho\sigma}\,\eta_\varrho\,(\eta_\alpha\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\beta\sigma} + \\ \qquad + \eta_\beta\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\sigma} - \eta_\sigma\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta})] + \\ \qquad - \gamma^{\varrho\sigma}\,[\partial_\varrho\,\partial_\sigma\,\gamma_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\,\partial_\beta\,\gamma_{\varrho\sigma} - \partial_\varrho\,\partial_\beta\,\gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\varrho\,\partial_\alpha\,\gamma_{\beta\sigma} + \eta_\varrho\,\gamma^4\,(\partial_\sigma\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta} + \\ \qquad - \partial_\beta\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\sigma} - \partial_\alpha\,\partial_4\,\gamma_{\beta\sigma})] + \\ \qquad - \gamma^{\varrho\sigma}\,[\eta_\alpha\,\gamma^4\,(\partial_\beta\,\partial_4\,\gamma_{\varrho\sigma} - \partial_\varrho\,\partial_4\,\gamma_{\beta\sigma}) + \eta_\beta\,\gamma^4\,(\partial_\alpha\,\partial_4\,\gamma_{\varrho\sigma} - \partial_\varrho\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\sigma})] + \\ \qquad - h_{\alpha\beta} = 0 \cdots W, \qquad (\gamma^{\varrho\sigma}\,\gamma_{\sigma\tau} = \delta^\varrho{}_\tau), \end{cases}
$$

(le $h_{\alpha\beta}$ essendo funzioni razionali ben determinate di $\eta_i, \gamma^i, \partial_r\eta_i, \partial_s\gamma^i, \partial_s\partial_r\eta_i$, $\gamma_{ij}, \partial_r\gamma_{ij}$ che non si sta ad esplicitare) e tale da soddisfare su $\bar{\Sigma}$ alle seguenti condizioni iniziali:

$$
(5)\qquad (\gamma_{\alpha\beta})_{x^4=0} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \quad , \quad (\gamma^4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta})_{x^4=0} = \bar{\varphi}_{\alpha\beta} \cdots \bar{\Sigma} .
$$

Osservazioni:

a) Avendo scelto coordinate adattate al campo $\gamma^i(x)$ e alla ipersuperficie $\bar{\Sigma}$, le componenti del tensore incognito γ_{ij}, in virtù della (3), dovranno verificare in tutto l'intorno W le condizioni $\gamma_{4j} \equiv 0$. Perciò le funzioni incognite del problema risultano essere soltanto sei, le $\gamma_{\alpha\beta}$.

b) Il tensore γ_{ik}, che risolve il problema ristretto di evoluzione, permette poi di individuare univocamente la metrica di V_4, $g_{ij} = \gamma_{ij} - \eta_i\eta_j$, nonché un riferimento fisico (rappresentato dal campo di vettori $\gamma^i(x)$ che nella metrica calcolata risulterà unitario, e la cui espressione covariante coin-

(6) Cioè tale che le linee del campo $\gamma^i(x)$ e l'ipersuperficie $\bar{\Sigma}$ abbiano rispettivamente equazioni $x^\alpha = \text{cost.}$, $x^4 = \text{cost.}$

ciderà proprio con $\eta_i(x)$) nel quale il tensore $\gamma_{ik}(x)$ medesimo rappresenterà il tensore metrico spaziale, e il tensore s_{ij} ($s_{4j} \equiv 0$) la proiezione totalmente spaziale del tensore contratto di curvatura R_{ij} della varietà V_4.

3. TRASFORMAZIONE DI UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA RISTRETTO DI EVOLUZIONE IN UNA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI EINSTEINIANE SCRITTE IN COORDINATE ARMONICHE. – Senza supporre analitici i dati, si ammetta che le equazioni di evoluzione (4), in un intorno W della porzione di ipersuperficie $\bar{\Sigma}$, possiedano una soluzione $\gamma_{\alpha\beta}$ che soddisfi su $\bar{\Sigma}$ le condizioni (5), mentre i dati $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}, \bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ siano stati scelti in modo da verificare le relazioni (2). Ne segue che, attribuendo alla varietà differenziabile V_4 il tensore metrico

$$g_{ik} = \gamma_{ik} - \eta_i \eta_k \qquad (\gamma_{4i} = 0) \tag{6}$$

il campo vettoriale $\eta_i(x)$, com'è immediato verificare, viene ad essere la rappresentazione covariante del campo di vettori controvarianti $\gamma^i(x)$; ne risulta individuato nell'intorno W di $\bar{\Sigma}$, un riferimento fisico S le cui linee orarie sono le linee del campo vettoriale $\gamma(x)$. Le equazioni di evoluzione (4) rappresentano [7] la proiezione totalmente spaziale, secondo il riferimento fisico S, delle equazioni

$$R_{ik} = 0 \tag{7}$$

che a loro volta equivalgono alle equazioni

$$G_{ik} = 0\,. \tag{8}$$

Quanto alle condizioni di compatibilità (2), esse sono, rispettivamente a meno del fattore γ_i e $\gamma_i\gamma_k$, la proiezione mista e la proiezione temporale delle equazioni (8) considerate su $\bar{\Sigma}$. Il campo di tensori (6) risolve il problema di Cauchy per le equazioni (7) e per le equivalenti (8).

Ciò posto, si esegua il passaggio dalle coordinate x^i a coordinate armoniche $x^{i'}$,

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3, x^4) \tag{9}$$

identificantisi colle x^i medesime sopra l'ipersuperficie $\bar{\Sigma}$. Si sceglieranno allo scopo come funzioni $x^{i'}(x)$ quattro soluzioni funzionalmente indipendenti dell'equazione iperbolica

$$g^{jk}\,\nabla_j \nabla_k \psi(x) \equiv g^{jk}\,[\partial_j \partial_k \psi(x) - \Gamma^r_{jk}\,\partial_r \psi(x)] = 0, \tag{10}$$

soddisfacenti su $\bar{\Sigma}$ alle condizioni

$$x^{i'} = x^i \quad , \quad \partial_i x^{i'} = \delta^{i'}_i \cdots \bar{\Sigma}\,. \tag{11}$$

(7) Cfr. Nota cit. in (3), formole (6), (12), e n. 3, 4.

Si osservi subito che in virtù delle condizioni iniziali (11) si avrà su $\bar{\Sigma}$

$$
(12) \quad \begin{cases} (g_{ik})_{\bar{\Sigma}} = (g_{i'k'})_{\bar{\Sigma}} \,, \ (\partial_\alpha g_{ik})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{\alpha'} g_{i'k'})_{\bar{\Sigma}} \,, \ (\partial_4 g_{\alpha\beta})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{4'} g_{\alpha'\beta'})_{\bar{\Sigma}} \,, \\ (\partial_4 g_{4i})_{\bar{\Sigma}} = (\partial_{4'} g_{4'i'} + \partial_4 \partial_4 x^{r'} \cdot g_{r'i'} + \partial_4 \partial_i x^{s'} \cdot g_{4's'})_{\bar{\Sigma}} \\ \qquad\qquad \text{con} \quad (g^{44} \partial_4 \partial_4 x^{r'})_{\bar{\Sigma}} = (g^{jk} \Gamma^s_{jk} \partial_s x^{r'})_{\bar{\Sigma}} \,. \end{cases}
$$

Perciò nel passare da un qualunque sistema di coordinate a coordinate armoniche i dati di Cauchy $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ [cfr. (5)] rimarranno invariati.

Per il tramite di una tale trasformazione di coordinate una soluzione del problema ristretto di evoluzione fornirà ovviamente una soluzione del problema di Cauchy per le equazioni (8), scritte in coordinate armoniche. Per inciso si osservi che al nuovo sistema di coordinate $x^{i'}$ corrisponderà naturalmente anche un nuovo riferimento fisico S′, *diverso* da S, benché coincidente con esso sull'ipersuperficie $\bar{\Sigma}$.

4. TRASFORMAZIONE DI UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE EQUAZIONI EINSTEINIANE IN COORDINATE ARMONICHE IN UNA SOLUZIONE DEL PROBLEMA RISTRETTO DI EVOLUZIONE. — Più interessante è il passaggio inverso. Si supponga di non sapere se il problema ristretto di evoluzione ammetta una soluzione, e si considerino dapprima le equazioni gravitazionali (8), scritte in un sistema di coordinate armoniche $x^{i'}$,

$$
(8)' \qquad R_{i'k'} \equiv \frac{1}{2} g^{r's'} \partial_{r'} \partial_{s'} g_{i'k'} + H_{i'k'} = 0
$$

ove le funzioni $H_{i'k'}$ sono dei polinomi in $g_{m'n'}$, $g^{m'n'}$ e delle loro derivate prime, che si tralascia di esplicitare. Si pensino poi assegnate su $\bar{\Sigma}$ $(x^{4'} = 0)$ le funzioni $\bar{g}_{i'k'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, $(\bar{g}_{4'\alpha'} \equiv 0)$, $\bar{\psi}_{i'k'}(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ (cui devono ridursi su $\bar{\Sigma}$ i potenziali $g_{i'k'}$ e le loro derivate $\partial_{4'} g_{i'k'}$) in modo che i tensori di $\bar{\Sigma}$ $\bar{\gamma}_{\alpha'\beta'}$ e $\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}$, che da essi si desumono mediante le relazioni

$$
\bar{\gamma}_{i'k'} = \bar{g}_{i'k'} + \bar{\eta}_{i'} \bar{\eta}_{k'} \,, \quad \bar{\varphi}_{\alpha'\beta'} = \gamma^4 \bar{\psi}_{\alpha'\beta'} \,,
$$

$$
\left(\bar{\eta}_{i'} = \frac{\bar{g}_{4'i'}}{\sqrt{-\bar{g}_{4'4'}}} \quad , \quad \bar{\gamma}^{4'} \bar{\eta}_{4'} = -1 \right),
$$

soddisfino alle condizioni (2) per i dati iniziali. Inoltre le $\bar{\psi}_{4'i'}$ permettano di verificare le condizioni iniziali di armonicità

$$
\left[\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}'}} \partial_{r'} \left(\sqrt{-\bar{g}'} \cdot \bar{g}^{r'i'} \right) \right]_{\bar{\Sigma}} = 0.
$$

Come ha mostrato la Bruhat (8), se i dati $\bar{g}_{i'k'}$, $\bar{\psi}_{i'k'}$ posseggono derivate parziali continue e limitate fino agli ordini cinque e quattro rispettivamente, il problema di Cauchy per le equazioni (8′) ammette, in un intorno 4-dimensionale W′ di $\bar{\Sigma}$, un'unica soluzione $g_{i'k'}(x')$, dotata di derivate parziali con-

(8) Cfr. 1ª Mem. cit. in (2), p. 220.

tinue e limitate fino al 4° ordine. Questa soluzione soddisfa poi automaticamente alle condizioni di armonicità in W':

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\,\partial_{r'}\left(\sqrt{-g'}\cdot g^{r'i'}\right) = 0 \cdots W'.$$

A partire dalle coordinate armoniche $x^{i'}$ considerate, si esegua ora una trasformazione di coordinate del tipo

$$x^{i'} = x^i + (x^4)^2\,\varphi^{i'}(x^1, x^2, x^3, x^4), \tag{14}$$

e si noti anzitutto che, comunque si scelgano le quattro funzioni $\varphi^{i'}$, le trasformazioni (14) soddisfano le condizioni (11) e lasciano perciò numericamente invariate su $\bar\Sigma$ le componenti dei tensori $\bar\gamma_{\alpha'\beta'}$, $\bar\varphi_{\alpha'\beta'}$ [cfr. (12)]. Si scelgano poi le funzioni $\varphi^{i'}$ in modo che nelle nuove coordinate le quattro componenti g_{4i} del tensore metrico soddisfino le relazioni

$$g_{4i} \equiv \partial_4 x^{r'}\cdot\partial_i x^{s'}\cdot g_{r's'} = -\eta_4\,\eta_i\,, \tag{15}$$

le funzioni $\eta_i(x)$ essendo le componenti del campo di vettori covarianti prescelto nel formulare il problema di evoluzione [9] (cfr. n. 2). Si ottiene così, in un intorno W di $\bar\Sigma$, un sistema di coordinate x^i tale che il vettore $\frac{g_{4i}(x)}{\sqrt{-g_{44}(x)}}$ si identifica con $\eta_i(x)$; ne segue che la rappresentazione controvariante del campo di vettori $\eta_i(x)$ è data proprio dal campo di vettori controvarianti $\gamma^i(x)$ anch'esso prescelto $\left(\eta^\alpha = 0\,,\ \eta^4 = -\frac{1}{\eta_4} = \gamma^4\right)$ e il nuovo sistema di coordinate è adattato al riferimento fisico S che il campo di vettori $\gamma(x)$ individua. Poiché le componenti $g_{i'k'}$ del tensore metrico soddisfano al sistema (8)', le analoghe componenti g_{ik} nelle coordinate x^i soddisfano al sistema di equazioni $R_{ik} = 0$, o al suo equivalente

$$G_{ik} = 0. \tag{16}$$

Nel riferimento fisico S e nelle coordinate x^i il tensore metrico spaziale è

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \gamma_i\gamma_k\,, \tag{17}$$

e il tensore gravitazionale $G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}$ ammette la decomposizione naturale [10]

$$G_{ik} = s_{ik} - \frac{1}{2} R\,\gamma_{ik} + S_i\gamma_k + S_k\gamma_i + \frac{1}{2}(\tilde{R}^* + \mathfrak{I})\,\gamma_i\gamma_k\,.$$

(9) Si osservi che si può evitare la risoluzione del sistema differenziale (15), se nel formulare il problema di evoluzione ci si limita ad assegnare come componenti del campo vettoriale $\eta_i(x)$ le funzioni ottenute per il tramite delle equazioni (15), nelle quali le funzioni $\varphi^{i'}$ possono essere date con larga arbitrarietà.

(10) Cfr. Nota cit. in (3), formole (1), (2), (5).

Come si è già mostrato nella Nota citata in [3], quando si pensi incognito il campo di tensori γ_{ik}, le equazioni einsteiniane (16) equivalgono al sistema di equazioni alle derivate parziali

$$s_{\alpha\beta} = 0 \cdots W \tag{18}$$

e alle condizioni iniziali

$$(S_\alpha)_{\overline{\Sigma}} = 0 \quad , \quad (\tilde{R}^* + \mathfrak{I})_{\overline{\Sigma}} = 0 . \tag{19}$$

In virtù dell'unicità del campo di tensori g_{ik} che soddisfa le equazioni (16) e su Σ verifica i dati $\bar{g}_{ik}$, $\bar{\psi}_{ik}$, e della sua decomposizione naturale ($g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k$), segue che il campo di tensori (17) rappresenta l'unica soluzione delle equazioni (18) verificante su Σ le condizioni

$$(\gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \quad , \quad (\gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta})_{\overline{\Sigma}} = \bar{\varphi}_{\alpha\beta} .$$

Il campo di tensori (17) è pertanto una soluzione, anzi l'unica, del problema ristretto di evoluzione.

In una prossima Nota si mostrerà come un teorema di esistenza e d'unicità per le equazioni di evoluzione (4) possa stabilirsi anche direttamente, e cioè senza il ricorso al teorema esistenziale per l'intero blocco delle equazioni einsteiniane, imponendo alcune restrizioni ai dati.