Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luis Bel, Jean C. Escard

Problemes d'interpretation des ds^2 stationnaires, rigides ou conformement rigides

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.6, p. 476–486.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_6_476_0>

Physique mathematique. — *Problemes d'interpretation des ds^2 stationnaires, rigides ou conformement rigides.* Nota di LUIS BEL e JEAN C. ESCARD, presentata (*) dal Corrisp. C. CATTANEO.

RIASSUNTO. — L'interpretazione di un dato ds^2 soluzione delle equazioni di Einstein del vuoto pone il problema di precisare le nozioni di campo di gravitazione, di spazio e di tempo. Ciò si può fare introducendo un campo di vettori orientati nel tempo. Noi abbiamo considerato tre casi che corrispondono rispettivamente ai casi in cui questo campo di vettori è generatore di un gruppo di isometrie, di un gruppo di movimenti rigidi, e di un gruppo che noi chiamiamo di movimenti conformemente rigidi. In questi tre casi si possono ottenere formule di proiezione che traducono le equazioni del campo e le equazioni del moto di una particella di prova sotto forma di equazioni tensoriali su una varietà riemanniana a tre dimensioni. Nei due primi casi i risultati menzionati sono in gran parte conosciuti e questo articolo non contiene di nuovo che alcune osservazioni complementari. Nel terzo caso i risultati indicati sono, a nostra conoscenza, nuovi. In modo generale in tutti tre i casi noi ci sforziamo di mettere in evidenza l'analogia formale che esiste tra le equazioni di proiezione ottenute e le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo scritte nel formalismo tridimensionale.

INTRODUCTION.

La théorie de la gravitation d'Einstein a ceci de très particulier qu'elle n'est pas uniquement une théorie de la gravitation mais aussi une théorie de l'espace–temps. Ceci pose des problèmes d'interprétation et plus précisément celui de déméler, pour tout ds^2 solution des équations d'Einstein, les notions de champ de gravitation d'espace et de temps; ou bien, d'une manière équivalente, d'obtenir des formules de projection de grandeurs définies intrinsèquement sur la variété espace–temps V_4 sur une variété riemannienne V_3 qu'il faudra définir.

L'objet de cet article est de discuter ce problème dans certains cas particuliers où des solutions suffisamment claires peuvent être proposées et comparées. Ces cas particuliers seront successivement le cas des ds^2 stationnaires, rigides et conformément rigides.

Ces restrictions limitent donc d'emblée la portée des considérations qui seront proposées. Mais nous croyons que la solution des problèmes d'interpretation généraux doit passer par la consideration approfondie de cas particuliers et que de toutes façons finalement une théorie physique n'est intéressante que dans les cas, fussent-ils particulieres, dans lesquels elle peut être comprise et appliquée sans ambiguité. Que la théorie qui nous occupe soit le plus souvent nommée Relativité Générale ne changeant rien à cela.

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1966.

1. NOTATIONS ET RAPPELS [1]. – Soit V_4 la variété différentiable espace–temps munie de la métrique riemannienne de signature $+2$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta, \cdots = 0, 1, 2, 3). \tag{1}$$

Considérons un champ de vecteurs $\vec{\xi}$ suffisamment différentiable et orienté dans le temps. Nous poserons:

$$\xi^2 = -\vec{\xi}^2 \quad , \quad \xi > 0 . \tag{2}$$

Un système de coordonnées adapté au champ de vecteurs $\vec{\xi}$ est un système de coordonnées tel que:

$$\xi^0 = 1 \quad , \quad \xi^i = 0 \qquad (i, j, \cdots = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Pour tout système de coordonnées adapté à $\vec{\xi}$ les composantes covariantes de ce vecteur sont:

$$\xi_0 = g_{00} = -\xi^2 \quad , \quad \xi_i = g_{0i} . \tag{4}$$

Posons:

$$\varphi_i \equiv \frac{g_{0i}}{g_{00}} . \tag{5}$$

La forme quadratique fondamentale (1), decomposée suivant la variable directrice x^0 s'écrit avec ces notations:

$$ds^2 = -(\theta^0)^2 + d\hat{s}^2 \tag{6}$$

où:

$$\theta^0 = \xi dx^0 + \xi\varphi_i\, dx^i \tag{7}$$

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}(x^0, x^k)\, dx^i\, dx^j \tag{8}$$

avec:

$$\hat{g}_{ij} \equiv g_{ij} + \xi^2\, \varphi_i\, \varphi_j \tag{9}$$

$d\hat{s}^2$ est, pour $x^0 = \text{const}$, une forme quadratique définie positive à trois variables.

Les systèmes de coordonnées adaptées à un champ de vecteurs $\vec{\xi}$ sont définis à des transformations près du type:

$$\begin{cases} x^0 = x^{0'} + \Phi(x^{k'}) \\ x^i = \Psi^{i}(x^{k'}) . \end{cases} \tag{10}$$

Par changement de système de coordonnées adaptées les différentes grandeurs introduites se transforment de la manière suivante:

$$\begin{cases} \xi' = \xi \qquad \varphi_{i'} = A^j_{i'}\, \varphi_j + \partial_{i'}\Phi \\ \hat{g}_{i'j'} = A^p_{i'}\, A^q_{j'}\, \hat{g}_{pq} \end{cases} \qquad (A^j_{i'} \equiv \partial_{i'}\psi^j). \tag{11}$$

(1) Voir A. LICHNEROWICZ [1] Chap. VII.

Le champ de vecteurs $\vec{\xi}$ definit une relation d'équivalence sur V_4 et nous désignerons par V_3 la variété quotient de V_4 par cette relation d'équivalence. Chaque point de V_3 est une trajectorie de $\vec{\xi}$ (2).

I. – ESPACE-TEMPS STATIONNAIRE

A) *Métrique d'espace quotient.*

2. ESPACE QUOTIENT. TEMPS STANDARD. CHAMP DE GRAVITATION. – Supposons que le champ de vecteurs $\vec{\xi}$ considéré précédemment soit le générateur d'un groupe d'isométries. Autrement dit supposons que:

$$\mathcal{L}(\vec{\xi})\, g_{\alpha\beta} = 0 \tag{12}$$

$\mathcal{L}(\vec{\xi})$ étant la dérivée de Lie associée à $\vec{\xi}$. L'espace-temps V_4 est dans ce cas stationnaire.

Pour tout système de coordonnées adapté à $\vec{\xi}$, (12) se traduit par:

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0 \tag{13}$$

ce qui est équivalent à:

$$\partial_0 \xi = 0 \quad , \quad \partial_0 \varphi_i = 0 \quad , \quad \partial_0 \hat{g}_{ij} = 0 . \tag{14}$$

De la troisième de ces relations il résulte en particulier que V_3, en vertu de (11), peut être munie de la métrique quotient:

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}\,(x^k)\, dx^i\, dx^j \tag{15}$$

V_3 munie de cette metrique sera designée par $\hat{V}_3$ et appelée espace quotient (sous entendu relatif à $\vec{\xi}$).

Remarquons aussi que compte tenu de (11) on a avec une notation évidente:

$$\theta^{0'} = \theta^0 . \tag{16}$$

Nous poserons:

$$d\mathrm{T} = \theta^0 \tag{17}$$

que nous appellerons suivant C. Cattaneo [2] la differentielle de temps standard. Evidemment $d\mathrm{T}$ n'est pas en général une différentielle exacte, et par consequent l'intervalle de temps standard $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$ entre deux points x_1 et x_2 devra toujours être défini par intégration de (17) le long d'une courbe joignant ces deux points.

Décomposons la différentielle extérieure de θ^0 suivant la co-base θ^0, dx^i. On obtient ainsi:

$$d\theta^0 = \mathrm{E}_i\, dx^i \wedge \theta^0 + \frac{1}{2}\, \mathrm{B}_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \tag{18}$$

(2) Voir dans [1] chap. VII les hypothèses exactes sous les quelles on peut difini V_3.

avec:

(19) $$E_i = \partial_i U \quad , \quad U = \log \xi \quad , \quad B_{ij} = \xi (\partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i) .$$

Nous poserons aussi:

(20) $$B^k = \frac{1}{2} \hat{\eta}^{kij} B_{ij}$$

$\hat{\eta}^{kij}$ étant le tenseur élément de volume de $\hat{V}_3$. On vérifie immédiatement qu'en vertu de (11) ou (16), $\vec{E}$ est un champ de vecteurs sur $\hat{V}_3$ et B_{ij}, dont le dual est $\vec{B}$, un champ de tenseurs antisymétriques.

D'après leur définition même $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient des équations de structure qui sont:

(21) $$\text{rot}\, \vec{E} = 0 \qquad \widehat{\text{div}}\, \vec{B} = \vec{E} \cdot \vec{B} .$$

Dans la deuxième de ces équations aussi bien l'opérateur $\widehat{\text{div}}$, comme indique la notation employée, que le produit scalaire sont entendus au sens de la métrique d'espace (15).

Nous appellerons l'ensemble des deux vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ champ de gravitation sur $\hat{V}_3$. Nous avons distingué ainsi, pour la décomposition suivant $\vec{\xi}$ envisagée, les notions d'espace, temps et champ de gravitation. Au paragraphe suivant nous essayons de justifier cette terminologie.

3. EQUATIONS DE MOUVEMENT. EQUATIONS DE CHAMP.

a) Considérons une particule d'épreuve de masse m_0 décrivant une géodésique Γ orientée dans le temps d'équations paramétriques:

(22) $$\Gamma : x^\alpha = x^\alpha (\tau) .$$

τ étant le temps propre mesuré à partir d'une origine donnée. Γ étant une géodésique nous aurons:

(23) $$\frac{\nabla u^\alpha}{d\tau} = 0 \qquad \left(u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}\right).$$

Posons:

(24) $$\vec{v} : v^j = \frac{dx^j}{dT} \qquad \hat{v}^2 = \hat{g}_{ij} v^i v^j$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \hat{v}^2}} \qquad \vec{p} : p_i = m \hat{g}_{ij} v^j .$$

Avec ces notations trois des équations (23) donnent sur V_3.

(25) $$\frac{\hat{\nabla} \vec{p}}{dT} = - m (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) .$$

Cette formule (3) dont on remarquera l'analogie avec celle de Lorentz en électromagnétisme a été obtenue, sous cette forme (4), par C. Cattaneo [2]. Nous voyons dans cette formule une première justification aux définitions d'espace, temps et champ de gravitation introduites au paragraphe précédent.

b) Supposons maintenant que (1) soit solution des équations d'Einstein du vide:

$$R_{\alpha\beta} = 0 \tag{26}$$

ce système d'équations peut être décomposé en trois groupes d'équations tensorielles sur $\hat{V}_3$. Les voici:

$$\widehat{\operatorname{div}}\, \vec{E} = -\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2\right) \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = -2\,\vec{E} \wedge \vec{B} \tag{27}$$

$$\hat{S}_{jn} = \hat{\nabla}_j E_n + E_j E_n + \frac{1}{2} B_j B_n + \frac{1}{4}\hat{g}_{jn} \vec{B}^2 \qquad \left(\hat{S}_{ij} = \hat{R}_{ij} - \frac{1}{2}\hat{R}\hat{g}_{ij}\right). \tag{28}$$

Ces équations sont, à des notations près, celles obtenues par Y. Thiry [5]. Les calculs permettant de les obtenir peuvent être consultér aussi dans A. Lichnerowicz [1] et I. Cattaneo [6].

c) Si le champ de gravitation est faible, dans ce sens qu'on puisse régliger les produits de composantes, et en outre la géométrie de $\hat{V}_3$ assez proche de l'espace euclidien pour qu'on puisse poser

$$\widehat{\operatorname{div}}\, \vec{E} \approx \operatorname{div} \vec{E} \qquad \widehat{\operatorname{div}}\, \vec{B} \approx \operatorname{div} \vec{B} \tag{29}$$

les systèmes d'équations (21) et (27) pouront s'écrire:

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 & \operatorname{div} \vec{B} \approx 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} \approx 0 & \operatorname{rot} \vec{B} \approx 0 . \end{array}\right. \tag{30}$$

C'est-à-dire, sous une forme formellement identique aux équations de Maxwell du vide dans le cas stationnaire. Nous voyons dans ces équations une justification supplémentaire à l'interprétation proposée des champs de vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

6. Revenons aux équations exactes (27). Nous voyons qu'elles mettent en évidence un scalaire W et un vecteur $\vec{P}$ ainsi définis:

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2\right) \qquad \vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{B}. \tag{31}$$

(3) L'opérateur du premier membre ainsi que le produit vectoriel du deuxième membre doivent être compris au sens de $\hat{V}_3$. Nous éviterons souvent par la suite des remarques de ce type.

(4) Voir aussi A. ZELMANOV [3] et C. MØLLER [4], § 92.

Il est suggestif d'interpréter respectivement ce scalaire et ce vecteur comme densité d'énergie et vecteur flux d'énergie, ou vecteur de Poynting du champ de gravitation. Disons à l'appui de cette interprétation que l'on a d'une part:

$$\widehat{\operatorname{div}}\,\vec{P} = 0 \tag{32}$$

comme il se doit, puisque l'espace–temps est stationnaire et par conséquent le flux d'énergie à travers une 2–surface fermée doit être nul, et que d'autre part W a la propriété d'être positif ou nul:

$$W \geq 0 \tag{33}$$

n'étant nul dans un voisinage ϑ de V_4 que si l'espace–temps est Minkowskien dans ce voisinage (5):

$$W = 0 \quad \text{dans } \vartheta \Rightarrow R_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0 \quad \text{dans } \vartheta . \tag{34}$$

Cette propriété a été etablie indépendamment par C. Cattaneo [7] pour un scalaire qui généralise essentiellement W et qui est défini pour des espaces–temps solution de (26) non forcément stationnaires.

Remarque. Si $\vec{B}$ est nul l'espace–temps est statique. On pourrait se demander s'il existe des espaces–temps stationnaires vides, à part l'espace–temps de Minkowski, pour $\vec{E}$ soit nul. La réponse est négative car en vertu de (27) et (34) $\vec{E} = 0$ entraînerait la nullité du tenseur de combure.

B) *Métrique d'espace conforme.*

4. NOUVELLE DEFINITION D'ESPACE. METRIQUE D'ESPACE CONFORME. – Jusqu'ici nous avons muni la varieté V_3 de la métrique quotient (15) que nous avons interpretée comme métrique d'espace. V. Fock [8] dans le cas statique et J. Ehlers [9] dans le cas stationnaire ont, avec des arguments de simplicité concernant différents aspects, mis en doute le bien fondé de cette interpretation. Ces auteurs ont proposé de munir V_3 de la métrique conforme:

$$d\bar{s}^2 = \xi^2\, d\hat{s}^2 \tag{35}$$

et interprété cette nouvelle métrique comme métrique d'espace. On obtient ainsi une variété riemannienne $\bar{V}_3$.

La métrique (35) jouit en effet de quelques propriétés interessantes dont voici la première.

Soit x^α un système de condonnées adapté à $\vec{\xi}$ et harmonique:

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad (g^{\alpha\varrho} g_{\beta\varrho} = \delta^\alpha_\beta \quad g = \text{dét}\,(g_{\alpha\beta})). \tag{36}$$

Ces quatre conditions se décomposent en deux groupes. Le premier groupe

$$\partial_i\left(\sqrt{\bar{g}}\, \bar{g}^{ij}\right) = 0 \qquad (\bar{g}^{ik}\bar{g}_{ik} = \delta^i_j \quad \bar{g} = \text{dét}\,(\bar{g}_{ij})) \tag{37}$$

(5) La démonstration de cette propriété nécessite l'utilisation de qualques uns des résultats intermédiaires permettant d'établir (27) et (28).

exprime que les trois condonnées x^i sont des coordonnées harmoniques de $\bar{V}_3$. Le deuxième groupe, réduit à l'équation:

$$\partial_i(\sqrt{\bar{g}}\,\bar{\varphi}^i) = 0 \qquad (\bar{\varphi}^i = \bar{g}^{ik}\varphi_k) \tag{38}$$

exprime, si l'on veut, que φ_i vérifie la condition de Lorentz.

Nous verrons au paragraphe suivant deux nouvelles propriétés intéréssantes de la mètrique (35).

5. EQUATIONS DE CHAMP. EQUATIONS DE MOUVEMENT. – Nous nous proposons maintenant de voir ce que deviennent les équations du vide (27) et (28) quand on remplace la métrique quotient (15) par la métrique conforme (35). Nous maintenons les mêmes définitions (19) pour le vecteur E_i et le tenseur antisymétrique B_{ij}, mais nous introduisons d'une part le vecteur (noté encore $\vec{B}$)

$$\vec{B} : B^k = \frac{1}{2}\bar{\eta}^{kij} B_{ij} \tag{39}$$

et d'autre part les deux vecteurs:

$$\vec{D} = \xi^{-1}\vec{E} \qquad \vec{H} = \xi\vec{B} \tag{40}$$

Avec ces nouvelles définitions on obtient pour les équations du vide [(6)]:

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{div}}\,\vec{D} = -\left(\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H}\right) \equiv -2W \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = -2\vec{E}\wedge\vec{H} = -2\vec{P} \end{cases} \tag{41}$$

$$\bar{S}_{jn} = 2\xi\left[D_j E_n + \frac{1}{4}B_j H_n - \frac{1}{2}\bar{g}_{jn}\left(\vec{E}\vec{D} + \frac{1}{4}\vec{B}\vec{H}\right)\right] \equiv 2\xi T_{jn}. \tag{42}$$

Les deux premières équations appellent les mêmes remarques que celles que nous avons faites pour (27) au parag. 3. En particulier il est clair que W dans (41) jouit encore des propriétes (33) et (34).

La différence essentielle entre (28) et (42) est que maintenant $\bar{S}_{jn}$ est donné par une expression purement algébrique dont on remarquera d'ailleurs l'analogie formelle avec le tenseur de tensions du champ électromagnétique. C'est une deuxième propriété intéressante de la métrique conforme (35) qui est l'origine d'une troisième.

Supposons que la solution stationnaire du vide envisagée dépende d'un paramètre λ:

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x^i ; \lambda) \tag{43}$$

de sorte que ces fonctions puissent être développées en série de puissances de λ et de sorte que pour $\lambda = 0$ on ait:

$$g_{\alpha\beta}(x^i ; 0) = \eta_{\alpha\beta} \qquad [\eta_{\alpha\beta} : (-1, +1, +1, +1)]. \tag{44}$$

(6) Voir ces mêmes équations écrites avec d'autres notations dans J. EHLERS [1].

Il est clair que les termes principaux de $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ et $\vec{H}$ seront au minimum de l'ordre de λ et que le terme principal de ξ est 1. Par conséquent le terme principal de $\bar{S}^{ij}$ sera au minimum de l'ordre de λ^2. Autrement dit les termes en λ^0 et λ de S_{ij} sont nuls. Or V_3 ayant trois dimensions ceci entraîne la nullité des termes en λ^0 et λ de $\bar{R}_{ijkm}$, tenseur de courbure de $\bar{V}_3$. Nous pouvons traduire tout ceci en disant que sous les hypothèses faites la métrique d'espace $d\bar{s}^2$ est osculatrice en chaque point à la métrique euclidienne (sous entendu par rapport au développement en série de puissances de λ). Ce résultat est l'énoncé général et intrinsèque d'un fait particulier signalé par V. Fock [8] concernant le ds^2 de Schwarzschild.

Considérons de nouveau les équations des géodésiques (23), mais posons cette fois:

$$p_i = m_0 \bar{g}_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \qquad \bar{v}^2 = \bar{g}_{ij} v^i v^j . \tag{45}$$

On obtient ainsi le système d'equations équivalent à (25):

$$\frac{\bar{\nabla}\vec{p}}{dT} = - m_E \vec{E} - m_B \vec{v} \wedge \vec{B} + 2 (\vec{E}\vec{v}) \vec{p} \tag{46}$$

avec:

$$m_E = \frac{m_0 \xi (\xi^2 + \bar{v}^2)}{\sqrt{\xi^2 - \bar{v}^2}} \qquad m_B = \frac{m_0 \xi^3}{\sqrt{\xi^2 - \bar{v}^2}} . \tag{47}$$

La métrique conforme semble conduire à des équations de mouvement plus difficilement comparables aux équations de mouvement d'une charge que celles obtenues avec la métrique quotient.

II. – ESPACES-TEMPS RIGIDES ET CONFORMÉMENT RIGIDES

6. ESPACES-TEMPS RIGIDES ET CONFORMÉMENT RIGIDES. – Le champ de vecteurs $\vec{\xi}$ étant donné il existe deux autres cas simples pour lesquels on peut munir V_3 d'une structure de variété riemannienne. Supposons en effet que $\vec{\xi}$ soit le générateur d'un groupe rigide, c'est-à-dire supposons que:

$$\pounds(\vec{\xi}) (g_{\alpha\beta} + \xi^{-2} \xi_\alpha \xi_\beta) = 0 \tag{48}$$

auquel cas l'espace-temps est dit rigide. En coordonnées adaptées à $\vec{\xi}$ (48) se traduisent par:

$$\partial_0 \hat{g}_{ij} = 0 . \tag{49}$$

Il est donc possible, comme au parag. 2, de définir dans ce cas aussi la variété riemannienne $\hat{V}_3$.

De même si nous supposons que $\vec{\xi}$ est tel que:

$$\pounds(\vec{\xi}) (\xi^2 g_{\alpha\beta} + \xi_\alpha \xi_\beta) = 0 \tag{50}$$

nous pourons définir la variété riemannienne $\overline{V}_3$ comme au parag. 4. En effet en coordonnées adaptées à $\vec{\xi}$, (50) se traduisent par:

$$\partial_0 \bar{g}_{ij} = 0 . \tag{51}$$

Nous dirons d'un espace–temps pour lequel il existe un champ de vecteurs $\vec{\xi}$ satisfaisant (50) qu'il est conformément rigide.

Si $\vec{\xi}$ est le générateur d'un groupe rigide, quelle que soit la fonction $f, f\vec{\xi}$ l'est aussi. Mais si $\vec{\xi}$ est le générateur d'un groupe conformément rigide, pour que $f\vec{\xi}$ le soit aussi il faut et il suffit que

$$\xi^\alpha \partial_\alpha f = 0 . \tag{52}$$

Il suit de cette remarque que la classe des espaces-temps conformément rigides est plus large que celle des espaces-temps rigides.

Par la suite nous supposerons que le module de $\vec{\xi}$ a été fixé de sorte que nous n'envisagerons pas des transformations du type

$$\vec{\xi} \rightarrow f\vec{\xi} . \tag{53}$$

7. CHAMP DE GRAVITATION. EQUATIONS DE STRUCTURE. – θ^0 étant encore définie par (7) nous définirons toujours le vecteur E_i et le tenseur antisymétrique B_{ij} par

$$d\theta^0 = E_i\, dx^i \wedge \theta^0 + \frac{1}{2} B_{ij}\, dx^i \wedge dx^j . \tag{54}$$

Mais cette fois–ci nous avons au lieu de (19)

$$E_i = \tilde{\partial}_i U - \partial_0 \varphi_i \qquad B_{ij} = \xi\,(\tilde{\partial}_i \varphi_j - \tilde{\partial}_j \varphi_i) \qquad (U = \operatorname{Log} \xi) \tag{55}$$

où l'opérateur $\tilde{\partial}_i$ que C. Cattaneo appelle dérivée transverse est par définition:

$$\tilde{\partial}_i = \partial_i - \varphi_i \partial_0 \tag{56}$$

et n'est autre que la dérivée pfaffienne i-ème relative au corepère θ^0, dx^i, dans ce sens que F étant une fonction quelconque on a.

$$dF = \xi^{-1} \partial_0 F \theta^0 + \tilde{\partial}_i F\, dx^i . \tag{57}$$

Bornons–nous à considérer le cas conformément rigide. Dans ce cas les équations de structure pour le vecteur $\vec{E}$ et le vecteur $\vec{B}$:

$$\vec{B} : B^k = \frac{1}{2} \bar{\eta}^{kij} B_{ij} \tag{58}$$

sont maintenant avec des notations évidentes:

$$\widetilde{\operatorname{rot}}\, \vec{E} + \frac{1}{\xi} \partial_0 B = 0 \qquad \overline{\overline{\operatorname{div}}}\, \vec{B} = \vec{E} \cdot \vec{B} . \tag{59}$$

Les modifications à apporter, dans le cas rigide, à la definition de $\vec{B}$ et aux définitions de l'opérateur divergence et produit scalaire sont aussi évidentes.

8. EQUATIONS DE CHAMPS. EQUATIONS DE MOUVEMENT. – Dans le cas rigide les équations du vide et les équations du mouvement ne sont pas, quant à leur forme, profondément altérées. Les formules de I. Cattaneo [6] et C. Cattaneo [2] montrent qu'il suffit de remplacer dans (25), (27) et (28) les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par (55) et l'analogue de (58) ainsi que toutes les dérivées partielles ∂_i par des dérivées transverses $\tilde{\partial}_i$.

Par contre dans le cas conformément rigide on trouve des modifications de forme plus importantes. Nous avons obtenu pour les équations du vide:

$$\text{(60)} \qquad \begin{cases} \overset{\approx}{\mathrm{div}}\, \vec{D} = -\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right) - 6\xi^3\partial_0(\xi^{-2}\partial_0 U) \\ \widetilde{\mathrm{rot}}\, \vec{H} = \frac{4}{\xi}\partial_0\vec{D} = -2\vec{E}\wedge\vec{H} + 4\xi^{-2}\partial_0\eta_j \\ \bar{S}_{jm} = 2\xi\left[D_j E_n + \frac{1}{4}B_j H_n - \frac{1}{2}\bar{g}_{jn}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)\right] + Q_{jm} \end{cases}$$

où:

$$\text{(61)} \qquad \vec{D} = \xi^{-1}\vec{E} \qquad \vec{H} = \xi\vec{B} \qquad \vec{\eta} : \eta_j = \partial_0\varphi_j$$

et:

$$\text{(62)} \qquad Q_{jm} = \frac{1}{2}(\overset{\approx}{\nabla}_m\eta_j + \overset{\approx}{\nabla}_j\eta_m) + \eta_j\eta_m - \bar{g}_{jm}[\overset{\approx}{\nabla}_k\eta^k + 5\xi^{-4}(\partial_0 U)^2 - 2\xi^{-4}\partial_{00}U].$$

On remarquera que cette fois-ci $\bar{S}_{jm}$ n'est plus égal à une expression purement algébrique des composantes du champ et qu'il contient même des dérivées secondes de φ_i.

Avec les notations du parag. 5 nous avons obtenu pour les équations du mouvement.:

$$\text{(63)} \qquad \frac{\overset{\approx}{\nabla}\vec{p}}{dT} = -m_E\vec{E} - m_B\vec{v}\wedge\vec{B} + 2p[(\vec{E}+\vec{\eta})\vec{v} + \xi^{-1}\partial_0 U] - (\vec{v}\cdot\vec{p})\vec{\eta}.$$

Pour terminer signalons que malgré la sensible complication des équations du vide (60) par rapport à (41)-(42) le scalaire

$$\text{(64)} \qquad W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\,\vec{H}\right)$$

jouit encore des propriétés (33) et (34) et est ainsi susceptible d'être interprété encore comme densité d'energie du champ de gravitation.

CONCLUSION.

Dans le cas stationnaire la décomposition considérée de la métrique permet une distinction claire des notions de temps, d'espace et de champ de gravitation. Un choix toutefois devrait être fait entre la métrique quotient et la métrique conforme. Les équations du mouvement, avec la première, et les équations du champ, avec la seconde, peuvent étre comparées agréablement aux équations correspondantes de l'électromagnétisme.

Nous avons voulu poursuivre cette comparaison à des cas non stationnaires, mais nous nous sommes imposés comme restriction aux généralisations envisagées la possibilité de definir l'espace par une variété riemannienne à trois dimensions. Nous avons ainsi été amenés à comparer des résultats déjà connus sur le cas rigide à ceux, que nous croyons nouveaux, sur le cas conformement rigide. Nous avons déjà dit que dans le premier cas les formules obtenues ne sont pas profondément altérées quant à leur forme par rapport à celles du cas stationnaire. C'est justement pour cette raison que la comparaison avec les équations du champ électromagnétique est malaisée. Par contre la situation est satisfaisante pour ce qui concerne les équations du mouvement. Dans le deuxième cas nous croyons pouvoir conclure que, malgrè quelque aspects qui demeurent clairs, le champ de gravitation manifeste déjà pleinement son originalité vis–à–vis du champ electromagnetique et ceci, bien entendu, dans le sens de la complication.

Peut–être ces deux cas n'étaient-ils pas les généralisations simples à considérer, permettant de conserver encore le parallélisme entre le champ de gravitation et le champ électromagnétique si saisissant dans le cas stationnaire.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. LICHNEROWICZ, *Th. Rel. de la Grav. et de l'Elec.*, Masson (1955).

[2] C. CATTANEO, «Nuovo Cimento», Sér. X, *10* (1958).

[3] A. ZELMANOV, «Dokl. Acad. Nauk SSSR», *107* (1956).

[4] C. MØLLER, *The theory of Relativity*, 2nd Ed., § 92. Oxford, Clarendon Press (1962).

[5] Y. THIRY, «Journal Math. pures et appl.», *30* (1951).

[6] I. CATTANEO, «C. R. Ac. Sc.», *252* (1961).

[7] C. CATTANEO, *C. R. Colloque Internat sur les théor. Rel. de la Grav.*, Londres (1965).

[8] V. FOCK, *The Theory of Sp. Time and Grav.*, 2nd Ed., § 56. Pergamon (1964).

[9] J. EHLERS, dans *Gravitation*, Ed. by L. Witten. John Wiley & Sons (1962).