Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Cherubino

Su alcune caratteristiche dell'economia

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.6, p. 464–467.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_6_464_0>

Economia matematica. — *Su alcune caratteristiche dell'economia.* Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata [*] dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A new mathematical method for the description of an economical system is here introduced and studied.

Le tendenze dell'economia moderna non si lasciano facilmente studiare essendo fra loro contraddittorie.

Noi abbiamo considerato la sua struttura ricorrendo ad un modello che differisce da quello di Leontief perchè le sue equazioni sono sostituite da disuguaglianze e perchè il sistema differenziale delle produzioni–prezzi e analoghi $2n$–vettori ha coefficienti funzioni del tempo in parte indeterminati, permettendo al sistema di soddisfare alle varie esigenze dell'economia.

Quello che qui importa è che la economia ripartita in $n > 1$ settori non può trattarsi adeguatamente nell'ordinario spazio, i suoi n–vettori essendo più propriamente variabili in uno spazio astratto. Ne conseguono alcune caratteristiche dei sistemi economici.

Negli spazi astratti vale ancora, con alcune modificazioni, il concetto di epoca e quello di entropia.

Infine abbiamo accennato alle ricerche del Lange, che estendono all'economia proprietà del tutto generali, che hanno in essa conseguenze importanti.

1. Sia un'economia ripartita in $n > 1$ settori, uno dei quali sia

$$\mathbf{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)].$$

Questo si rappresenta con un punto dello spazio ad n dimensioni S_n, le cui coordinate sono funzioni del tempo t variabile negli n intervalli ciascuno, meno l'ultimo, aperto a destra:

$$(t_1, t_2), (t_2, t_3), \cdots, (t_s, t_{s+1}) \tag{1.1}$$

$$t_i \leqq t < t_{i+1} \quad , \quad t_s \leqq t \leq t_{s+1}.$$

Il vettore $\mathbf{X}(t)$ descrive negli (1.1) altrettanti insiemi di punti:

$$I_1, I_2, \cdots, I_s \tag{1.2}$$

limitati e misurabili.

Sia f una funzione limitata e misurabile in tutti gli insiemi (1.2). Diremo che gli intervalli di tempo (1.1), ovvero gli insiemi (1.2), i quali costituiscono un'epoca [1] per l'economia rispetto alla funzione f se la somma degli integrali

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1966.

(1) S. CHERUBINO, *Il concetto di epoca in economia matematica* («Rend. Lincei», serie VIII, vol. XXXVI, fasc. 5, pp. 267–271).

di Lebesgue estesi ad un certo numero di insiemi (1.2), ad esempio, a quelli di posto pari, è nulla.

Per la proprietà della media [2], si ha:

$$0 \leqq \sum_k \int_{I_{2k}} f d\, I_{2k} \leqq \sum_k m^{(k)} \Delta I_{2k} \tag{1.3}$$

dove $m^{(2k)}$ è la misura di I_{2k} e ΔI_{2k} è *l'estremo superiore* della distanza di due suoi punti qualunque variabili in I_{2k}.

Essendo sempre $f > 0$, sarà anche:

$$m^{(k)} > 0 \,, \qquad k = 1\,, 2\,, \cdots, s \tag{1.4}$$

ed è necessariamente:

$$0 \leqq \Delta\, I_{2k} \geqq 0 \tag{1.5}$$

Per valere, con $f > 0$, la:

$$\sum_k \int_{I_{2k}} f d\, I_{2k} = 0 \,, \tag{1.6}$$

nella (1.5) deve valere il solo segno eguale, ed i sottospazi I_{2k} si riducono ciascuno ad un solo punto.

Gli insiemi (1.2) possono essere limitati, contigui, e lineari sopra una retta: in tal caso l'intervallo $(t_1\,, t_{s+1})$ è uno pseudo-intervallo [3].

Consideriamo i sottospazi (1.2) costituiti da un'infinità continua o numerabile di punti: essi si dicono di *regolarità* per il sistema economico. Data la funzione f in essi si hanno integrali di Lebesgue non necessariamente eguali a zero, ma positivi o negativi secondo che è tale la funzione f.

Il concetto di epoca non dipende dalla funzione positiva f, nè dal vettore $\mathbf{X}(t)$, ma dal sistema economico e dallo spazio astratto in cui esso è rappresentato.

Se si ha un modello *chiuso*, fra i suoi settori vi sono quello dei prezzi e quello dei costi di lavoro per produzione unitaria: diciamoli $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{z}$ e formiamo i prodotti scalari:

$$\boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1} \quad , \quad \boldsymbol{z}\mathbf{X}_{-1} \tag{1.7}$$

detti valore *nominale* e valore *intrinseco* del vettore $\mathbf{X}(t)$. Questi scalari, moltiplicati eventualmente per e^{it}, danno integrali di Lebesgue positivi, quale che sia l'intervallo non nullo nè vuoto di tempo e gli insiemi cui sono estesi, mentre sono positivi per i sottospazi (*pause*) costituiti da un numero finito di punti maggiore di uno.

(2) F. CAFIERO, *Misura ed integrazione* (Cremonese, Roma, 1959) cap. VI, § 3, p. 323; G. TORELLI, *Calcolo infinitesimale* (Napoli, Accad. delle scienze, 1918) Appendice, Conferenza V, p. 349.

(3) S. CHERUBINO cit., n. 4, p. 240.

2. L'entropia è data dall'integrale di Lebesgue:

$$S = \int_C \frac{dQ}{T} \tag{2.1}$$

calcolato sopra una curva rettificabile del piano TV, essendo $T \geqq 1$, temperatura, e $V \geqq 0$, capacità, con:

$$Q = TV \tag{2.2}$$

l'energia. Si ha:

$$V = \boldsymbol{p}\mathbf{S}^{*}_{-1}, \qquad \text{oppure} \quad V = u\mathbf{S}^{**}_{-1}, \qquad u = (u_1\, u_2\,,\, u_n) \tag{2.3}$$

con $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{S}^{**}$ superproduzione e survalore della produzione del sistema economico, entrambe non negative (4).

Si usa anche esprimere l'entropia con la relazione:

$$S = k \log w \tag{2.4}$$

ove k è una costante che in termodinamica è detta di Boltmann (5) e w è una probabilità (6), quindi:

$$0 \leqq |\log w| \leqq 1. \tag{2.5}$$

Si ha perciò:

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{2.6}$$

e, per la (2.4) si avrà:

$$|S| \leqq |k|. \tag{2.7}$$

Prendiamo la matrice degli scambi intersettori dell'economia:

$$\boldsymbol{x} = [x_{r,s}] \tag{2.8}$$

e normalizziamola (7). Si avrà:

$$\boldsymbol{x} \approx [\xi_{r,s}] = W \;{}^{(8)}. \tag{2.9}$$

Si suol porre:

$$\log w = \det W \tag{2.10}$$

(4) S. CHERUBINO, 1. *Energia, entropia, sintropia di un sistema economico* (« Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXXII, fasc. novembre–dicembre 1961, pp. 218–221); 2. *Conservazione dell'energia ed efficacia di un sistema economico* (« Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXXIII, fasc. 5, 1962, pp. 276–280).

(5) TOLMAN, *The principles of statistical mecanics* (Oxford Press, 1959) cap. XIII, § 99, p. 340.

(6) G. PALOMBA, *Caratteri dell'espansione capitalistica* (« Rassegna Economica » IV.1, gennaio–aprile 1966) pp. 91–103).

(7) S. CHERUBINO, *La probabilità della matrice dei coefficienti tecnici* (« Rassegna Economica, n. 2, maggio–agosto 1966), pp. 547–550).

(8) Il segno $\approx$ si legge « si comporta come ».

quindi il massimo valore assoluto $|k|$ di S sarà raggiunto quando:

$$W = I \tag{2.11}$$

matrice identica, ossia se:

$$\begin{cases} \xi_{rr} = 1 \\ \xi_{r,s} = 0 , \qquad \text{per} \quad r \neq s . \end{cases} \tag{2.12}$$

Ciò richiede:

$$x = 1\, I \tag{2.13}$$

quindi l'economia è una microeconomia, per la quale (all'incirca) valgono tutte le ipotesi classiche o neoclassiche.

Se W non è identica, non valgono le (2.12) e neppure la (2.13) e l'economia è una macroeconomia, per la quale valgono (*approssimativamente*) le ipotesi dell'economia di massa, ovvero sia vale la concorrenza tecnologica (9).

3. L'entropia S può indicare col suo segno, con la sua crescenza o decrescenza e con la sua stazionarietà fasi diverse dell'economia, favorevoli o sfavorevoli alla formazione del reddito nazionale inteso come profitto (10).

Dalla (2.1) si ha infatti che:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{T\,dV + V\,dT}{T} \tag{3.1}$$

e dalla (2.6) si ottiene:

$$dS = kd \log w = k \left(dV + V \frac{dT}{T}\right) \tag{3.2}$$

dalle quali si trae che il segno di dS è quello eventualmente comune a dT e dV, (a meno della costante k). In ogni altro caso il segno di dS è funzione di dV, di dT (e di k) cumulativamente.

D'altra parte, il Lange (11) ha mostrato che il raggiungimento delle condizioni di equilibrio o di ergodicità del sistema economico (o altro sistema materiale) si verifica solo quando una certa matrice possiede freed–back compensatori e radici caratteristiche tutte di modulo minore di uno (12). In ogni altro caso, l'economia (o il sistema materiale) segue dialetticamente la legge del moto del sistema che implica quella di sviluppo, che induce certe *inputs* ed *outputs* degli stati successivi del sistema contraddicenti gli stati precedenti od ottimali.

In ciò consiste la legge dialettica di sviluppo del sistema.

(9) S. CHERUBINO, *Gruppi evolutivi di un sistema economico* («Rend. mat.», [1. 2] vol. 22, pp. 285–316) n. 2. 3.

(10) G. PALOMBA, *L'espansione capitalistica* (Napoli, Giannini, 1962) parte II, Appendice al cap. XVIII, pp. 183–198.

(11) OSKAR LANGE, *Wholes and parts. A general theory of system behaviour* (Pergamon Press, PWN, Polish Scientific Publishers, Warsrawa 1965).

(12) Cfr. cap. X del nostro secondo volume di *Economia Matematica* (Roma, Cremonese, 1966).