
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALBERTO TOGNOLI

Proprietà globali degli spazi analitici reali

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 41 (1966), n.6, p. 460–463.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_6_460_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Proprietà globali degli spazi analitici reali.* Nota di ALBERTO TOGNOLI (*), presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

SUMMARY. — Let X be a real analytic paracompact space (with nilpotent elements) then X has a complexification $\tilde{X}$ and there exists a fundamental system of neighbourhoods of X in $\tilde{X}$ that are Stein spaces.

It follows that the theorems A and B hold for every coherent sheaf of modules on an analytic real space.

Let V^m be a complex m -dimensional manifold and $\sigma: V^m \rightarrow V^m$ an antiinvolution, then the set $V' = \{x \in V^m \mid \sigma(x) = x\}$ is a real m -dimensional analytic manifold or the empty set. From these results follow imbedding theorems of real analytic n -dimensional space in $\mathbb{R}^{4n+2}$.

In the last part it is proved that any real analytic space (without nilpotent elements) admits a (global) decomposition into irreducible components and a normalization.

La teoria degli spazi complessi ha avuto notevoli sviluppi negli ultimi anni. Parecchi argomenti, ed in particolare lo studio delle varietà e degli spazi di Stein possono dirsi sufficientemente sistemati.

H. Cartan, nel 1957, provò la validità dei teoremi A e B per gli insiemi analitici reali coerenti di $\mathbb{R}^n$ e mise in luce alcune differenze sostanziali esistenti fra gli spazi analitici reali e gli spazi complessi. Un successivo lavoro di H. Grauert permette di generalizzare i risultati di H. Cartan al caso degli insiemi analitici reali coerenti di una varietà analitica reale.

Da circa un anno mi sto occupando dello studio degli spazi analitici reali paracompatti, a priori non immersi in una varietà. I principali risultati che ho ottenuto sono contenuti, con dettagliate dimostrazioni, in un lavoro di prossima pubblicazione. Darò qui un breve sunto dei metodi usati e dei risultati ottenuti.

Per spazio analitico reale intenderemo uno spazio anulato localmente isomorfo ad un insieme analitico di $\mathbb{R}^n$ (1).

Con il termine R -spazio (X, O_X) indichiamo uno spazio X , con fascio coerente di anelli locali O_X , che sia localmente isomorfo ad un insieme analitico reale di $\mathbb{R}^n$, con eventuali elementi nilpotenti.

Tutti gli spazi di cui tratteremo sono separati e soddisfano al II assioma di numerabilità.

Data una varietà analitica reale X è possibile ([1]) costruire una sua complessificata $\tilde{X}$ (2). Di più X ha in $\tilde{X}$ un sistema fondamentale di intornoi che sono varietà di Stein (vedi [3]).

(*) Alberto Tognoli. Lungarno Mediceo 14. Pisa.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1966.

(1) Cioè il corrispondente reale degli spazi complessi, senza elementi nilpotenti, nel senso di Serre.

(2) Una varietà complessa $\tilde{X}$ si dice complessificata di una sua sottovarietà reale chiusa X se, per ogni $x \in X$, esiste una carta $\rho: U_x \rightarrow \mathbb{C}^n$ di un intorno di x tale che $\rho(U_x \cap X) = \rho(U_x) \cap \mathbb{R}^n$.

Ho provato, più in generale, il seguente

TEOREMA 1. — *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico, esiste allora una complessificazione $\tilde{X}$ di X tale che:*

- i) *X ha in $\tilde{X}$ un sistema fondamentale di intorno che sono spazi di Stein.*
- ii) *esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$ ed un'antiinvoluzione $\sigma: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ tale che $X = \{x \in \tilde{U} \mid \sigma(x) = x\}$ ed $\tilde{U}$ è uno spazio di Stein.*

Dal teorema 1 si deduce agevolmente la validità dei teoremi A e B per gli R-spazi analitici. Si ha cioè

TEOREMA 2. — *Sia (X, O_X) un R-spazio analitico, $\mathcal{F}$ un fascio coerente di O_X moduli. Si ha allora:*

A) *per ogni $x \in X$ l' $O_{X,x}$ modulo $\mathcal{F}_x$ è generato dall'immagine dell'applicazione di restrizione $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x$ (ove $O_{X,x}, \mathcal{F}_x$ sono le spighe di $O_X, \mathcal{F}$ nel punto x);*

B) *per ogni $q \geq 1$ si ha $H^q(X, \mathcal{F}) = \{0\}$.*

Dato un morfismo fra R-spazi $\varphi: (X, O_X) \rightarrow (Y, O_Y)$ e due complessificati $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}}), (\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}})$ esiste un intorno aperto $\tilde{U}$ di X in $\tilde{X}$ ed un morfismo $\tilde{\varphi}: (\tilde{U}, O_{\tilde{X}|_{\tilde{U}}}) \rightarrow (\tilde{Y}, O_{\tilde{Y}})$ che estende φ .

Se consideriamo due tali estensioni esse coincidono su un intorno di X .

Associando ad ogni R-spazio il germe del complessificato si definisce perciò un funtore fra la categoria degli R-spazi e quella dei germi di $\mathbf{C}$ -spazi.

Se ci si restringe agli spazi analitici reali coerenti i legami fra φ e $\tilde{\varphi}$ sono più stretti e l'applicazione $\tilde{\varphi}$ può servire a studiare φ .

Si prova ad esempio la seguente

PROPOSIZIONE 1. — *Siano X, Y due spazi analitici reali coerenti ed $\tilde{X}, \tilde{Y}$ due complessificazioni di X, Y .*

Sia dato un omeomorfismo analitico $f: X \rightarrow Y$ e sia $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{Y}$ un'estensione olomorfa di f .

Condizione sufficiente affinché f^{-1} sia analitica è che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1° *per ogni $x \in X$ esiste un intorno $U_x \ni x$ in $\tilde{X}$ tale che $\tilde{f}$ sia iniettiva su U_x ;*

2° *$\tilde{Y}$ è normale in tutti i punti di Y .*

È noto (vedi [4]) che ogni spazio di Stein di dimensione n si può immergere in $\mathbf{C}^{2n+1}$. Il teorema 1, ed altre considerazioni, ci permettono di provare il

TEOREMA 3. — *Sia X uno spazio analitico reale coerente di dimensione n ; esiste allora un complessificato $\tilde{X}$ di X ed un'antiinvoluzione $\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ tale che X sia il luogo dei punti fissi di σ . Esiste inoltre un'applicazione olomorfa $\eta: \tilde{X} \rightarrow \mathbf{C}^{4n+2}$ tale che:*

i) *η è iniettiva, propria, ed ha lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di $\tilde{X}$;*

ii) *$\eta(X) = R^{4n+2} \cap \eta(\tilde{X})$ e σ induce in $\eta(\tilde{X})$ l'antiinvoluzione generata dal coniugio in $\mathbf{C}^{4n+2}$.*

In generale il complessificato di un R-spazio (X, O_X) ha dimensione complessa maggiore della dimensione reale di X e quindi il teorema 3 non si può estendere banalmente al caso degli R-spazi.

Vale però il seguente

LEMMA 1. - Sia V^n una varietà complessa di dimensione n e $\sigma: V^n \rightarrow V^n$ un'antiinvoluzione. In queste ipotesi il luogo dei punti fissi di σ è vuoto oppure è una sottovarietà analitica reale di dimensione n di V^n .

Il lemma 1 ci permette di provare il seguente generale teorema di immersione:

TEOREMA 3 bis. - Sia (X, O_X) un R -spazio analitico di dimensione n . Sia U un aperto di X , tale che:

α) la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad un complessificato $(\tilde{X}, O_{\tilde{X}})$ di (X, O_X) , sia minore, od eguale, ad $m < +\infty$, in ogni punto di U .

Si ha allora:

i) esiste un'applicazione iniettiva, propria, analitica

$$\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^{4n+2};$$

ii) esiste un'applicazione iniettiva, propria, analitica

$$\psi: X \rightarrow \mathbb{R}^{2q}$$

tale che

$$\psi: U \rightarrow \psi(U)$$

sia un isomorfismo di U in un insieme analitico $\psi(U)$ di $\mathbb{R}^{2q}$.

Se inoltre X è coerente, sostituendo ad α) l'ipotesi che la dimensione dello spazio tangente di Zariski ad X_x sia minore od eguale ad m , per $x \in U$, si ottengono i risultati i) ed ii).

In questa ipotesi si può affermare inoltre che φ e ψ hanno lo Jacobiano di rango massimo nei punti regolari di X .

Se poi $U = X$ esiste un'immersione propria

$$\chi: X \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2m}$$

tale che $\chi(X)$ sia un insieme analitico reale di $\mathbb{R}^{2n+2m}$ e $\chi: X \rightarrow \chi(X)$ sia un isomorfismo.

H. Cartan ha provato che, in generale, l'insieme dei punti singolari di uno spazio analitico reale non è un insieme analitico, né si può affermare che sia contenuto in un insieme analitico di codimensione uno. Con alcuni esempi egli prova anche che per gli spazi analitici reali non esiste una decomposizione in componenti irriducibili globali.

Per mezzo dei risultati esposti noi siamo in grado di provare:

a) se (X, O_X) è un R -spazio analitico l'insieme dei punti singolari di X è contenuto in un sottoinsieme analitico di codimensione almeno uno di X ;

b) se X è uno spazio analitico reale coerente l'insieme dei punti singolari di X è un sottoinsieme analitico, di codimensione almeno uno, di X ;

c) se X è uno spazio analitico reale coerente esso si decompone in una famiglia, al più numerabile, di componenti irriducibili $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Di più ogni X_i è un sottospazio analitico puramente dimensionale irriducibile di X e due componenti X_i, X_j non hanno punti regolari in comune.

Come nel caso complesso si dà la nozione di spazio analitico reale normale. Si prova che in uno spazio analitico reale, coerente, normale l'insieme dei punti singolari ha codimensione almeno due. Per gli spazi normali si danno facili criteri di coerenza e si potrebbe sperare che ogni spazio analitico normale sia coerente.

L'ipersuperficie di R^4 data dall'equazione

$$z(x^2 + y^2) - x^2 w^2 + w^2 = 0$$

dà però un esempio di uno spazio normale non coerente.

Se X è uno spazio analitico reale coerente si può costruire, come nel caso complesso, il normalizzato di X .

Più precisamente si ha il

TEOREMA 4. — *Sia X uno spazio analitico reale coerente, $\tilde{X}$ un suo complessificato e $\pi: \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$, la normalizzazione di $\tilde{X}$.*

Detto $\hat{X} = \pi^{-1}(X)$ si ha:

i) $\hat{X}$ è uno spazio analitico reale, localmente irriducibile, ed $\hat{X}$ è un suo complessificato;

ii) $\hat{X}$ è normale e coerente;

Un normalizzato si può costruire anche per gli R -spazio analitici, tale costruzione però in generale non è unica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. BRUNAT-H. WHITNEY, *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels*, « Com. Math. Helvetici », 33, fasc. 2, 132-160 (1959).
- [2] H. CARTAN, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*, « Bull. Soc. Math. France », 85, 77-100 (1957).
- [3] H. GRAUERT, *On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifold*, « Annals of Math. », 68, 460-472 (1958).
- [4] R. NARASIMHAN, *Imbedding of holomorphically complex space*, « Amer. Jour. of Math. », 82, n. 4, 917-934 (1960).