Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre

Coppie di forme binarie a jacobiano definito, e forme antidefinite o massimali in campo reale. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.6, p. 435–445.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_6_435_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 dicembre 1966

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Coppie di forme binarie a jacobiano definito, e forme antidefinite o massimali in campo reale.* Nota II [(*)] del Socio BENIAMINO SEGRE.

SUMMARY. — Several types of necessary and sufficient conditions are obtained for a given binary real form f of degree n to be " antidefinite " (§ IV) or " maximal " (§ VI), i.e., in order that f has no imaginary roots or possesses n real simple roots respectively. Moreover, a number of properties are established concerning the Hessian of a binary form in the real field (§ V).

In questa Nota II stabiliamo i teoremi IV–VIII (nn. 9, 13, 15, 16, 19), enunciati al n. 1 della Nota I [(1)], assieme a vari risultati ulteriori, fra cui taluno riguardante forme binarie dei gradi più bassi. Va rilevato che, per comodità nei rinvii, nella presente Nota vengono proseguite le numerazioni dei paragrafi e delle formule di detta Nota I, e che la Bibliografia trovasi alla fine della Nota I.

IV. – FORME BINARIE ANTIDEFINITE.

9. Le forme binarie antidefinite appaiono pienamente c a r a t t e r i z z a t e dal teor. IV, enunciato nel n. 1 (ma fin qui ancora da stabilire); altre loro caratterizzazioni si ottengono applicando adeguatamente un clas-

(*) Presentata nella seduta del 10 dicembre 1966.
(1) Apparsa a p. 215 di questo volume dei « Rendiconti ».

sico risultato di Sturm, giusta quanto accennato al principio dello stesso n. 1. Nel presente numero dimostreremo appunto quel teorema.

Rilieviamo anzitutto che la necessità della condizione ivi specificata si ottiene subito per $i = 1$ poggiando sul n. 5, a) e c). Iterando quest'osservazione i volte, ne consegue senz'altro che quella condizione è necessaria per ciascun valore di $i = 1, 2, \cdots, n-2$ (oltreché per $i = n - 1$: ma in questo caso il risultato è banale, poiché la condizione per tale valore di i è sempre soddisfatta, ond'essa non è allora di certo sufficiente). Anche la validità dell'inciso dato alla fine dell'enunciato del teor. IV si trae agevolmente dal n. 5, c).

Per accertare la sufficienza della suddetta condizione basterà farlo per $i = 1$, ossia relativamente ad una data f (per la quale conserviamo le notazioni dei nn. 4, 5) ed ai gruppi f_0 primi polari dei singoli punti O reali della retta rispetto ad f; infatti dopo ciò, applicando i volte opportunamente tale risultato parziale, si deduce subito la parte rimanente del teor. IV.

Allo scopo indicato testé, principiamo coll'osservare che f è certamente antidefinita nell'ipotesi ch'essa sia ipersingolare (n. 4); è quindi lecito supporre f non ipersingolare, nel qual caso i suddetti f_0 costituiscono una γ^1_{n-1} reale, i cui punti base costituiscono il gruppo φ, d'ordine $n^* - n'$, di cui al n. 5. I gruppi

$$g_0 = f_0 - \varphi$$

sono precisamente i gruppi reali della γ^1_m (priva di punti base) di cui al n. 5, b); e si tratta di dimostrare che:

Nell'ipotesi che ciascun g_0 sia antidefinito, tale risulta altresì necessariamente il dato gruppo f.

In virtù del teor. III (dimostrato nel n. 8), dall'ipotesi ammessa per i g_0 segue che ciascuno di questi consta di m punti reali e distinti e che gli stessi g_0 a due a due si separano. Pertanto, quando il punto reale O descrive la retta in un senso determinato, gli m punti del corrispondente g_0 si muovono con continuità tutti nel medesimo senso, il quale a priori può soltanto coincidere con o risultare l'opposto del senso di movimento del punto O. Esprimeremo ciò col dire che la corrispondenza algebrica T, associante ad ogni punto O della retta gli m punti del relativo g_0, è rispettivamente concorde o discorde in senso globale. E si noti che T ammette (tanto nel campo reale che in quello complesso) gli indici $(1, m)$; inoltre – in virtù di ben note proprietà delle polari – i punti fissi di T sono tutti e soli i punti di f, fra i quali (n. 4) esattamente n' distinti risultano reali. Ci proponiamo dapprima di stabilire – nelle attuali condizioni – l'*esistenza di almeno un punto reale siffatto.*

Il risultato è manifesto se f possiede qualche punto multiplo reale, ossia (n. 4) se $n^* > n'$. Resta quindi soltanto più da esaminare, a quell'intento, l'eventualità in cui $n^* = n'$. Ma allora, in virtù del n. 5, b) e dell'ipotesi $n \geq 3$ ammessa nel teor. IV da dimostrare, risulta $m \geq 2$. Con facile argomentazione di carattere topologico si vede poi che la T – secondoché risulta discorde o concorde – possiede in campo reale un numero di punti uniti esattamente uguale ad $m+1$ o non inferiore ad $m-1$, talché l'asserita esistenza di almeno un punto unito segue in ogni caso senz'altro.

Possiamo dunque riferirci ad un punto O^* unito reale di T; conseguentemente, O^* apparterrà ad f con una certa molteplicità k (ove $1 \leq k \leq n-1$) ed a φ con molteplicità $k-1$ (non apparterrà a φ se $k=1$). Assunto O^* quale origine delle coordinate x proiettive non omogenee di punto sulla retta, l'equazione di f risulterà del tipo

$$f(x) = x^k + \cdots = 0,$$

col solito significato per i puntini. Un punto $O(\varepsilon)$ dell'intorno di O^* ha allora il gruppo polare f_O dato da

$$\varepsilon f'(x) + [nf(x) - xf'(x)] = [k\varepsilon + (n-k)x]\, x^{k-1} + \cdots = 0,$$

onde $g_{O(\varepsilon)} = f_O - \varphi$ ha l'equazione in x:

$$[k\varepsilon + (n-k)x] + \cdots = 0.$$

Questa mostra che T è d i s c o r d e localmente, nell'intorno di O^*, e quindi altresì globalmente nel senso dianzi specificato. In virtù di quanto precede si ha così

$$n' = m + 1,$$

sicché il n. 5, b) porge:

$$n = n^*.$$

L'ultima relazione esprime che f è antidefinito (n. 4), come si trattava appunto di stabilire.

10. Sia f una forma binaria reale di grado n, non indeterminata, data dalla prima equazione del n. 3; come s'è visto (n. 4), il corrispondente gruppo di punti f può allora venire rappresentato dalla (4). È chiaro intanto che la f risulta sempre antidefinita se $n=1$, mentre se $n=2$, 3 la condizione perché f sia antidefinita vien porta dal n. 5, e).

Per $n > 3$ si ottengono subito vari insiemi di condizioni n e c e s s a r i e affinché f sia antidefinita, applicando il teor. IV ed il n. 5, e). Più precisamente, f i s s a t o un qualunque i soddisfacente alle $1 \leq i \leq n-2$, e prese i coppie di variabili omogenee (y_{1s}, y_{2s}) $(s = 1, 2, \cdots, i)$, si consideri la relativa polare i–ma:

$$\prod_{s=1}^{i} \left(y_{1s} \frac{\partial}{\partial x_1} + y_{2s} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) f.$$

Detto D_i il discriminante di questa forma binaria di grado $n-i$ nelle x, per una f antidefinita – comunque si scelgano le y – deve sussistere la relazione

$$D_i \geq 0;$$

e si ha poi anche similmente la

$$D \geq 0 ,$$

ove si denoti con D il discriminante della f.

Si aggiunga che, sempre in base al teor. IV ed al n. 5, e), *la validità per valori (reali) arbitrari delle y della*

$$D_{n-2} \geq 0 \tag{9}$$

è condizione necessaria e sufficiente affinché f sia antidefinita (e lo stesso può dirsi della $D_{n-3} \geq 0$). Inoltre, *se nessuna delle coppie* (y_{1s}, y_{2s}) *è uno zero di f, nella* (9) *vale il segno di uguaglianza se, e soltanto se, f è ipersingolare* (e cioè se f ammette n radici uguali).

Un facile calcolo mostra che la (9) si esplicita con la:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_{k+2}\right) - \tag{10}$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{(s)_k} y_{1s_1} \cdots y_{1s_k} y_{2s_{k+1}} \cdots y_{2s_{n-2}} a_{k+1}\right)^2 \leq 0 ,$$

le $\sum\limits_{(s)_k}$ essendo qui estese alle $\binom{n-2}{k}$ partizioni degli interi $1, 2, \cdots, n-2$ in coppie di combinazioni complementari $(s_1, \cdots, s_k)$ ed $(s_{k+1}, \cdots, s_{n-2})$. Così, ad esempio, assumendo

$$y_{2s_1} = y_{2s_2} = \cdots = y_{2s_k} = y_{1s_{k+1}} = \cdots = y_{1s_{n-2}} = 0$$

e le altre y arbitrarie, purché non nulle, la (10) porge:

$$a_k \, a_{k+2} - a_{k+1}^2 \leq 0 , \tag{11}$$

dove k denota uno qualunque degli interi $0, 1, \cdots, n-2$. Nelle ipotesi suddette, nessuna delle (y_{1s}, y_{2s}) risulta uno zero di f qualora si supponga

$$a_0 \neq 0 \quad , \quad a_n \neq 0 . \tag{12}$$

Pertanto:

Se – valendo le (12) *– f è antidefinita, sussiste la limitazione* (11) *(per* $k = 0, 1, \cdots, n-2$*), nella quale (per uno, e quindi altresì per ciascuno, di tali valori di k) l'uguaglianza ha luogo se, e soltanto se, f è ipersingolare.*

11. Dire che – valendo la prima delle (12) – la f data dalla (4) è antidefinita, equivale per definizione (n. 4) ad affermare che le sue n radici $x_1, x_2, \cdots, x_n$ risultano *reali*. Gli sviluppi dei nn. 9, 10 forniscono quindi *condizioni necessarie e sufficienti affinché n quantità reali* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *siano le funzioni simmetriche elementari*

$$\alpha_k = \Sigma\,(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k})$$

di altre n quantità reali $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, da esse univocamente definite (a meno dell'ordine), in quanto – supposto, com'è lecito, $a_0 = 1$ – la (4) porge allora senz'altro:

$$\alpha_k = (-1)^k \binom{n}{k} a_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, n). \tag{13}$$

Nell'ipotesi di frequente applicazione che ognuna delle x_i debba essere positiva, è subito visto che per le α si ottengono le sole condizioni addizionali ch'esse pure siano positive. Attualmente valgono dunque sempre entrambe le (12); sicché le (11) – avuto riguardo alle (13) ed alla $a_0 = 1$ – forniscono subito note limitazioni per le α, implicanti fra l'altro la classica relazione

$$\alpha_1 \geq \alpha_n^{1/n}$$

fra la media aritmetica α_1/n e la media geometrica $\alpha_n^{1/n}$ delle x, l'uguaglianza valendo (per quanto sopra) sia in questa che in ciascuna di quelle nel caso, e nel caso soltanto, in cui risulti $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

V. – SULL'HESSIANO DI UNA FORMA BINARIA IN CAMPO REALE.

12. La proposizione d) del n. 5, non ammette un'inversa, come ora mostreremo con esempi (per il primo dei quali cfr. il § 10 di [5], Nota III).

Riferiamoci alla forma biquadratica

$$f = ax_1^4 + 6bx_1^2x_2^2 + cx_2^4,$$

con a, b, c reali. Essa ha il discriminante

$$D = 2^8 ac(ac - 9b^2)^2,$$

l'invariante di Salmon

$$T = b(ac - b^2)$$

e l'hessiano

$$H = 2^4 \cdot 3^2 \,[abx_1^4 + (ac - 3b^2)x_1^2x_2^2 + bcx_2^4].$$

L'hessiano H risulta così una forma biquadratica nelle x del medesimo tipo della f, il cui discriminante Δ vale

$$\Delta = 2^{20} \cdot 3^{12} \cdot D \cdot T^2 \ (2).$$

(2) Quest'identità fra D, T e Δ si stabilisce con facile calcolo diretto, a partire dalle precedenti equazioni. E va rilevato ch'essa sussiste conseguentemente per una forma f biquadratica qualsiasi, in quanto D, T e Δ sono invarianti di f.

La relazione stessa, a prescindere dal valore del coefficiente numerico che vi compare, si ottiene pure con semplice argomentazione d'altro genere, in quanto D, T e Δ sono notoriamente forme irriducibili nei coefficienti della generale f biquadratica, aventi in essi rispettivamente grado 6, 3 e 12; si perviene allora a quell'identità osservando che Δ deve risultare divisibile per D e per T^2, poiché – com'è subito visto – l'hessiano di una quaterna dotata di un punto doppio o che sia armonica possiede rispettivamente uno o due punti doppi distinti, e che il quoziente di Δ per DT^2 ha grado zero ed è quindi una costante.

Si noti che la suddetta identità prova poi che *quelli sono i soli casi in cui* H *risulti singolare.*

Dall'ultima relazione, tenuto pure conto del n. 4, si trae intanto subito incidentalmente che:

Se una forma biquadratica binaria f avente il discriminante D $\neq$ 0 *possiede due radici reali e due complesse coniugate, di queste stesse proprietà gode sempre la forma biquadratica* H *hessiana di f, con una sola eccezione per il caso che f risulti armonica, nel quale* H *ammette due diverse radici doppie.*

Notiamo ora che mentre, a norma del n. 5, d), se la forma f è massimale la H risulta sempre definita, il viceversa non è vero poiché *esistono forme f binarie definite aventi per hessiano una forma* H *pure definita.* Un esempio in proposito è dato dalla quartica f considerata al principio del presente numero, ove si assumano le a, b, c tutte positive o tutte negative e soddisfacenti alla $ac > b^2$; si verifica infatti subito che entrambe le forme f ed H risultano allora definite (e che per esse non vi sono anzi altri casi in cui ciò abbia luogo).

Si perviene ad un esempio più generale nel modo seguente. Si parta da una qualsiasi forma binaria f definita (di grado $n \geq 2$ necessariamente pari), che abbia l'hessiano H_f pure definito (quest'ultima condizione risulta conseguenza della prima per $n = 2$). Denotando poi con s un qualunque intero positivo, la forma $g = f^s$ (di grado ns) e la sua hessiana H_g risultano manifestamente definite, in base alla proposizione finale del n. 2.

Si noti che, se $s > 1$, il discriminante della g dianzi ottenuta risulta nullo. Tuttavia, ove si tenga conto dell'*Osservazione* del n. 4, si vede che – assoggettando g ad una piccola variazione generica – si perviene ad *una forma definita a discriminante non nullo avente l'hessiana pure definita.* Quella ha come grado un qualsiasi numero pari ($2s$), in quanto la f di partenza può ovviamente supporsi una forma quadratica (arbitraria, purché definita).

13. A complemento del rilievo fatto nel primo capoverso del n. 12, ci proponiamo ora di stabilire l'inversa parziale della proposizione d) del n. 5 espressa dal teor. V (enunciato nel n. 1). Gli sviluppi del n. 12 dimostrano che sarebbe vano il cercare d'invertire completamente tale proposizione.

Sia f un qualsiasi gruppo reale d'ordine $n \geq 3$ di una retta, tale che l'hessiano H di f non contenga punti reali distinti dagli eventuali punti multipli di f. Ciò implica intanto che H non sia indeterminato, sicché f non è certamente ipersingolare (n. 5, a). Pertanto, il gruppo f_O primo polare di O rispetto ad f – al variare di O sulla retta – descrive una γ^1_{n-1}; questa ha – nel campo reale – un certo gruppo base φ, costituito dagli eventuali punti multipli reali di f presi con molteplicità opportune (ved. n. 5; φ risulta dunque vuoto se, e soltanto se, f non contiene alcun punto siffatto).

Posto ora $\gamma^1_m = \gamma^1_{n-1} - \varphi$ (dove l'intero $m \geq 1$ trovasi determinato nel n. 5, b), in virtù della prima proposizione del n. 2 l'hessiano H di f, e cioè lo jacobiano di γ^1_{n-1}, è dato dalla somma del doppio di φ con lo jacobiano J di γ^1_m. Poiché J non contiene nessun punto di φ (n. 5, b), l'ipotesi ammessa per H si traduce in ciò che J risulti definito. Possiamo quindi applicare il teor. I alla γ^1_m, ciò che porta intanto al carattere m^* di cui alla prima parte dell'enunciato del teor. V (soddisfacente di fatto alle $1 \leq m^* \leq m \leq n-1$).

Per dimostrare la seconda parte di quel teorema, riferiamoci alla corrispondenza algebrica R che associa ai singoli punti O della retta quelli del relativo gruppo

$$g_0 = f_0 - \varphi .$$

Tale corrispondenza, di indici $(1, m)$ nel campo complesso, ha in campo reale gli indici $(1, m^*)$ e risulta inoltre concorde o discorde in senso globale, analogo a quello specificato nel n. 9 per la corrispondenza T (che è un caso particolare della R suddetta); del pari, i punti fissi reali di R sono precisamente gli n' punti reali di f (contati una sola volta ciascuno).

Procedendo per la R in modo del tutto consimile a quello seguito al n. 9 per la T, si vede che – se $m^* \geq 2$ – esiste certamente in campo reale qualche punto fisso di R; e che – se R ammette almeno un punto siffatto (e cioè escluso al più il caso in cui il gruppo f sia definito) – la R risulta discorde, onde il numero dei suoi punti fissi reali (e quindi pure quello n' dei punti distinti reali di f) vale allora esattamente $m^* + 1$ (≥ 2). I vari fatti asseriti dalla parte restante del teor. V ne discendono così senz'altro.

Ulteriori proprietà inerenti all'hessiano di una forma binaria verranno ottenute nel successivo § VI (nn. 16–19).

VI. – SEPARAZIONE E MASSIMALITÀ DI FORME BINARIE IN CAMPO REALE.

14. Il teor. IV (enunciato nel n. 1 e dimostrato nel n. 9) conduce, in particolare, a condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma binaria reale risulti massimale. Tali condizioni si ottengono subito da quelle specificate dal teor. IV col sostituire ivi dappertutto all'attributo di « antidefinito » quello di « massimale », e si traducono con le limitazioni di cui al n. 10 intese però in senso stretto; così, ad esempio, nelle (9), (10) *l'uguaglianza può aver luogo attualmente nel solo caso banale in cui entrambi gli elementi di almeno una coppia* (y_{1s}, y_{2s}) *valgano zero*, il che fornisce risultati già da noi ottenuti in [5], Nota III, § 9. Un criterio notevole – di tutt'altro tipo – trovasi (come già detto nella nota (2) del n. 1) in A. Borchardt, Journ. de Math., 12, 50–67 (1847).

A condizioni di massimalità di natura un po' diversa si perviene – come vedremo – facendo intervenire la nozione di gruppi massimali che si separano (n. 4), ed usufruendo opportunamente di alcuni dei risultati precedentemente acquisiti in argomento.

15. Proviamo dapprima il teor. VI (enunciato nel n. 1), incominciando dal caso in cui $k = 1$.

Siano f, g due gruppi massimali di punti d'ordine $n \geq 2$ di una retta che si separino, ed O denoti un qualsiasi punto reale della retta. A norma del teor. II, ogni gruppo $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ reale della γ_n^1 determinata da f e g risulta massimale. Ne consegue (n. 5, c) che, comunque si scelgano λ_1, λ_2 reali e non entrambi nulli, il gruppo

$$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)_0 = \lambda_1 f_0 + \lambda_2 g_0$$

risulta massimale, ed è quindi privo di punti doppi. Dunque, in particolare, i gruppi f_0 e g_0 sono massimali (d'ordine $n - 1$); essi inoltre si separano, in virtù del teor. I, e ciò completa la dimostrazione del teor. VI per $k = 1$.

Se $k > 1$, non v'è che da applicare k volte in modo ovvio il risultato parziale dianzi stabilito, per giungere alla conclusione voluta.

16. Una conseguenza immediata dei teoremi I e II è che:

Su di una retta reale, due gruppi massimali dello stesso ordine si separano se, e soltanto se, il loro jacobiano risulta definito; in tal caso è altresí massimale ogni gruppo reale della serie lineare da quelli determinata.

Avuto riguardo al n. 5, c) e d) nonché al teor. IV (in cui si assuma $i = 1$), ed usufruendo delle notazioni specificate al n. 3, da qui si trae che:

Affinché una forma binaria f di grado $n \geq 3$ a coefficienti reali sia massimale, è necessario e sufficiente che le forme f_{10}, f_{01} siano massimali e si separino, od anche che f_{10}, f_{01} siano massimali e che la forma $\mathrm{H} = \mathrm{H}_{00}$ (loro jacobiana ed hessiana di f) risulti definita.

Se $n = 3$, le f_{10}, f_{01} sono forme quadratiche, e la condizione ch'esse siano massimali si traduce in ciò che i loro hessiani $\mathrm{H}_{10}, \mathrm{H}_{01}$ (uguali ai rispettivi discriminanti mutati di segno) siano costanti n e g a t i v e.

Se $n > 3$, in virtù dell'ultimo enunciato in corsivo la condizione che f_{10}, f_{01} siano massimali equivale a ciò che tali siano f_{20}, f_{11}, f_{02} e che le forme hessiane $\mathrm{H}_{10}, \mathrm{H}_{01}$ risultino definite. Così proseguendo per induzione decrescente rispetto al grado, arrestandosi infine alle f_{pq} quadratiche alle quali si applichi quanto rilevato nel precedente capoverso, si ottiene che:

Affinché una forma binaria f di grado $n \geq 3$ a coefficienti reali sia massimale, è necessario e sufficiente che: (i) *ciascuna delle* H_{pq} *con* $p \geq 0, q \geq 0, p + q = n - 2$ *sia una costante negativa*; (ii) *ciascuna delle* H_{pq} *con* $p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq n - 3$ *sia una forma definita.*

Si noti ora che, se valgono le (i), in forza della (3) del n. 3 le (ii) possono venire precisate mediante la condizione che ciascuna delle H_{pq} che in esse compaiono debba risultare una forma definita n e g a t i v a; mentre poi, ancora in base alla (3), le (ii) così precisate implicano le (i). L'ultima proposizione porge dunque senz'altro il teor. VII (enunciato nel n. 1).

17. In relazione al precedente capoverso, ci si può ancora domandare se le condizioni n e c e s s a r i e e s u f f i c i e n t i di massimalità di cui al teor. VII siano o meno indipendenti fra loro, nonché se e come esse possano venir semplificate col tener conto delle seguenti condizioni n e c e s s a r i e. Introdotta in relazione ad f e giusta il n. 3 la forma derivata f_{pq}, designamo

con D_{pq} il discriminante di questa (talché, al solito, $D = D_{00}$ denoterà il discriminante di f). Allora, tenuto conto del n. 5, c) ed e), si ha tosto che:

Affinché f risulti massimale, occorre, che – per tutti i valori di p, q soddisfacenti alle $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \leq n - 2$ – si abbia

$$D_{pq} > 0 .$$

Le questioni dianzi poste verranno discusse nella parte restante del lavoro, limitandoci per semplicità (tranne che nell'ultimo capoverso del n. 19) ai primi valori di n soltanto. Ne risulterà ch'esse ammettono risposte di tipi assai differenti, a seconda del valore di n.

È chiaro intanto che per $n = 1$ ogni f risulta massimale; e che per $n = 2$ si ha la sola condizione di massimalità $D > 0$, la quale, in base a quanto già è stato osservato (n. 16), può venir anche scritta sotto la forma $H < 0$.

Per $n = 3$, il n. 5, e) ed il teor. VII forniscono ciascuno ancora una sola condizione necessaria e sufficiente di massimalità, data rispettivamente da $D > 0$ e da ciò che l'hessiano H di f dev'essere una forma quadratica definita negativa. Si può osservare che quest'ultima condizione risulta sovrabbondante, bastando – in sua vece – ammettere il *carattere definito di* H. Invero, detto Δ il discriminante di H, tale ammissione si traduce con la disuguaglianza $\Delta < 0$; e questa equivale alla suddetta condizione $D > 0$, in quanto notoriamente (cfr. ad esempio [6], p. 208) per $n = 3$ sussiste l'identità:

$$\Delta = - 2^4 \cdot 3 \cdot D .$$

Il risultato testé provato mostra poi come, per $n = 3$, anche le condizioni offerte dalla seconda proposizione del n. 16 appaiano sovrabbondanti.

18. Passiamo ad esaminare da vicino il caso $n = 4$. Per esso, il teor. VII porge le condizioni necessarie e sufficienti che ciascuna delle forme

$$\text{(14)} \qquad H \quad , \quad H_{10} \quad , \quad H_{01}$$

risulti definita negativa.

In virtù del penultimo capoverso del n. 17, il carattere definito (positivo o negativo) delle forme quadratiche H_{10}, H_{01} si esprime colle

$$\text{(15)} \qquad D_{10} > 0 \quad , \quad D_{01} > 0 ,$$

che rispettivamente traducono la massimalità delle forme cubiche f_{10}, f_{01}. D'altra parte, ove si supponga H definito, in forza del n. 4 il discriminante Δ di H ha da soddisfare alla $\Delta \geq 0$. Tenuto conto dell'identità per esso ottenuta nel n. 12, risulta pertanto che nelle ipotesi attuali – e supposto inoltre $DT \neq 0$ – non può che aversi $D > 0$; sicché, ancora in virtù del n. 4, la forma f può soltanto essere o definita oppure massimale.

Si osservi ora che, se f ed H sono ambedue definite, ciascun gruppo primo polare reale di f contiene uno ed un sol punto reale (teor. V), talché allora certamente nessuna delle (15) sussiste. Pertanto, le condizioni per le (14) richiamate in principio risultano di fatto sovrabbondanti, e si ha più precisamente che:

Per la massimalità di una forma binaria biquadratica reale, non singolare né armonica, occorre e basta che la sua hessiana sia definita e che i suoi coefficienti soddisfino ad una qualsiasi (e quindi pure all'altra) delle disuguaglianze biquadratiche (15).

Va rilevato che in quest'enunciato *l'ultima condizione non può venire omessa*, potendo benissimo (n. 12) due forme come le suddette f ed H essere entrambe definite, nel qual caso – come già si è osservato – le (15) non sono di certo verificate.

19. Alle questioni poste al principio del n. 17 risponde infine per $n = 5$ il teor. VIII (n. 1), che ora passiamo a dimostrare; ed è particolarmente significativo che, a norma, del n. 18, il risultato in esso enunciato non risulti trasportabile senza essenziali alterazioni alle forme biquadratiche.

La necessità delle condizioni specificate nel teor. VIII essendo già acquisita (nn. 4 e 5, d), basterà stabilirne la sufficienza. Detta f una forma binaria quintica reale, di cui – al solito – si denoti con D il discriminante e con H l'hessiano, sia dunque $D > 0$ e si supponga inoltre che la forma H risulti definita. L'ipotesi $D > 0$ implica che f sia non singolare e possegga una sola oppure esattamente cinque radici (semplici) reali (n. 4). Di queste due eventualità, la prima non può però aver luogo in virtù del teor. V e di quanto ammesso per H; sicché deve sussistere la seconda, che è appunto ciò che si voleva dimostrare.

A complemento di quanto precede, notiamo che ivi *la condizione* $D > 0$ *non può essere omessa*, neppure quando quella relativa ad H venga rafforzata esigendo che – com'è necessario (n. 16) – H *risulti una forma definita negativa*. Basta invero riferirsi per esempio alla quintica binaria

$$f = x_1 (x_1^4 - 2 x_1^2 x_2^2 - x_2^4),$$

la quale possiede manifestamente cinque radici semplici, tre reali e due complesse coniugate, sicché (n. 4) per essa si ha $D < 0$. D'altro canto, la forma H hessiana di quella f vale

$$H = -16 [5 x_1^6 + x_2^2 (21 x_1^4 - 3 x_1^2 x_2^2 + x_2^4)]$$

ed è pertanto definita negativa.

Rilieviamo da ultimo che, ove si passi a forme binarie d'ordine $n > 5$ (almeno per n multiplo di 4), *le condizioni (necessarie)* « $D > 0$ *ed* H *definita negativa* » *non bastano più ad assicurarne la massimalità*. Allo scopo di dimostrarlo, consideriamo anzitutto la

$$f = x_1^{2m} - 2(2m - 1) x_1^m x_2^m + x_2^{2m}$$

che, com' è subito visto, risulta non singolare nell'ipotesi che sia $m > 1$. Poiché, supposto inoltre $m \neq 2$ pari, tale f – di grado $n = 2m \neq 4$ multiplo di 4 –

possiede manifestamente in tutto 4 radici (semplici) reali, così (n. 4) il discriminante D di f risulta positivo e, di più, f non è massimale. D'altro canto, l'hessiano H di f vale

$$H = -4m^2(m-1)(2m-1)^2 x_1^{m-2} x_2^{m-2} (x_1^m + x_2^m)$$

ed è quindi (nelle ipotesi ammesse) una forma semidefinita negativa. Se ora si assoggetta quella f ad una piccola variazione qualsiasi, se ne deduce una forma g che ancora ha grado n e discriminante positivo, e che è non massimale come la f (n. 4, *Osservazione*); e la variazione di f – secondo si riscontra con facile calcolo – può venire effettuata in guisa tale che la forma hessiana di g (ottenibile dalla suddetta H colla corrispondente piccola variazione) risulti proprio definita negativa.